CÁLCULO

de varias variables

Ignacio Ramírez
Luis Palacios



GRUPO EDITORIAL PATRIA

Recursos en línea

Cálculo de varias variables

Grupo Editorial Patria

Cálculo de varias variables

Ignacio Ramírez Vargas
Luis Manuel Palacios Pineda

Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Pachuca

Primera edición ebook
México, 2017



Para establecer comunicación con nosotros puede hacerlo por:



correo:
Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca, Azcapotzalco, 02400, Cd. de México



fax pedidos:
(01 55) 5354 9109 • 5354 9102



e-mail:
info@editorialpatria.com.mx



home page:
www.editorialpatria.com.mx

Dirección editorial: Javier Enrique Callejas
Coordinadora editorial: Estela Delfín Ramírez
Supervisor de preprensa: Jorge A. Martínez J.
Diseño de portada: Perla Alejandra López R.
Ilustraciones: Gustavo Vargas Martínez
Diagramación: Gustavo Vargas Martínez
Fotografías: ©Thinkstockphoto

Revisión técnica:
Víctor Francisco Robledo-Rella
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey
Ana Elizabeth García Hernández
Instituto Politécnico Nacional

Cálculo de varias variables

Derechos reservados:
©2017, Ignacio Ramírez Vargas, Luis Manuel Palacios Pineda
©2017, Grupo Editorial Patria, S.A. de C.V.
Renacimiento 180, Colonia San Juan Tlihuaca
Azcapotzalco, Ciudad de México

Miembro de la Cámara Nacional de la Industrial Editorial Mexicana
Registro Núm. 43

ISBN ebook: 978-607-744-680-4 (Primera edición)

Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de la presente obra en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin el consentimiento previo y por escrito del editor.

Impreso en México
Printed in Mexico

Primera edición ebook: 2017

Contenido

Prólogo XI

Capítulo 1

Vectores y la geometría del espacio 1

Competencias específicas a desarrollar 1

1.1 Vectores en dos dimensiones 1

Introducción 1

Los vectores cartesianos. Vectores unitarios 4

1.2 Vectores en tres dimensiones 5

El espacio tridimensional 5

Geometría de los vectores en tres dimensiones 7

Definición de un vector en V_3 8

Fórmula del punto medio 8

Vectores unitarios 8

Vector unitario en tres dimensiones 9

1.3 Producto escalar (o producto punto) 10

Ángulo entre dos vectores 10

Proyección escalar 11

Proyección vectorial 12

1.4 Aplicación física del producto escalar. Trabajo mecánico 12

1.5 Producto vectorial (o producto cruz) 13

1.6 Productos triples 16

Interpretación geométrica de productos triples 17

Área de un triángulo 17

Volumen de un paralelepípedo 17

1.7 Rectas en el espacio 18

Ecuaciones simétricas de la recta 19

1.8 Planos, cilindros, superficies de revolución y superficies cuadráticas 19

Planos 19

Definición de un plano 20

Ángulo entre dos planos 21

Planos paralelos 21
Planos normales 21
Cálculo de la distancia de un punto *P* a un plano 21
Cilindros 22
Definición de cilindro 22
Superficies de revolución 24
Superficies cuadráticas 26
Elipsoide 27
Hiperboloide de un manto 27
Hiperboloide de dos mantos 28
Paraboloide 28
Paraboloide hiperbólico 28
Cono elíptico 29
Orientación de las superficies 29

CAPÍTULO 2
FUNCIONES VECTORIALES 35

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS A DESARROLLAR 35
2.1 Introducción 35
2.2 Funciones vectoriales y ecuaciones paramétricas (dos dimensiones) 36
Derivadas de las ecuaciones paramétricas 38
Primera y segunda derivadas de ecuaciones paramétricas 38
2.3 Cálculo diferencial de funciones vectoriales (dos dimensiones) 40
Derivada de una función vectorial 41
Fórmulas de derivación 42
Vectores tangente y normal unitarios 43
2.4 Curvatura 45
Funciones vectoriales y ecuaciones paramétricas (tres dimensiones) 47
Longitud de arco 51
Curvas de dos dimensiones 51
Curvas en tres dimensiones 51
2.5 Cálculo diferencial de funciones vectoriales (3 dimensiones) 52
Vector binormal unitario 54

CAPÍTULO 3
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES 57

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS A DESARROLLAR 57
3.1 Introducción 57
3.2 Curvas de nivel 59

3.3 Límites y continuidad de funciones de varias variables ... 60
Regla de las dos trayectorias ... 61
3.4 Derivadas parciales ... 62
Notación para las derivadas parciales ... 63
Interpretación geométrica de las derivadas parciales ... 63
Segundas derivadas parciales ... 65
3.5 Derivadas direccionales ... 66
El vector nabla $\vec{\nabla}$ ... 69
Derivada direccional en términos del gradiente ... 70
3.6 Diferencial total ... 71
3.7 Planos tangentes y rectas normales a las superficies ... 73
3.8 Rectas en el espacio. Repaso ... 79
Ecuaciones paramétricas de una recta en el espacio ... 79
Ecuación vectorial de una recta ... 80

Capítulo 4
Integración múltiple ... 87

Competencias específicas a desarrollar ... **87**
4.1 La integral doble ... 87
Introducción ... 87
La integral doble ... 89
Integrales iteradas. Volumen bajo una superficie ... 90
Regiones rectangulares ... 90
Regiones generales, tipo I y tipo II ... 91
Regiones de tipo I y II ... 92
4.2 La integral triple ... 94
Integral triple. Definición ... 94
Evaluación de integrales triples mediante integrales iteradas ... 95
4.3 Integrales múltiples en otros sistemas de coordenadas ... 95
Coordenadas polares ... 95
Gráficas de ecuaciones polares ... 97
Cardiodes y limazones (caracoles) ... 99
Rosas y circunferencias ... 99
Circunferencias ... 101
La integral doble en coordenadas polares ... 101
Coordenadas cilíndricas ... 105
La integral triple en coordenadas cilíndricas ... 106
Coordenadas esféricas ... 106
La integral triple en coordenadas esféricas ... 107

4.4 Aplicaciones 107
Masa y centro de masas 108
Momentos de inercia 109
Radio de giro 110

CAPÍTULO 5
INTEGRACIÓN DE CAMPOS VECTORIALES 115

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS A DESARROLLAR 115
5.1 Campos vectoriales 115
5.2 Integrales de línea 120
Trabajo de una fuerza 120
Trabajo de un campo vectorial 121
Integral de línea y métodos de evaluación 122
Integral de línea 122
Métodos de evaluación 124
Notación 125
Integrales de línea a lo largo de curvas cerradas simples 126
Integrales de línea en el espacio 127
Integrales de línea independientes de la trayectoria 128
Criterio para la independencia de la trayectoria 129
5.3 Teoremas de integrales 129
Teorema de Green y de Stokes 129
Teorema de Green 129
Teorema de Stokes 130

CAPÍTULO 6
ECUACIONES DIFERENCIALES 133

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS A DESARROLLAR 133
6.1 Ecuaciones diferenciales 133
Introducción 133
Clasificación de las ecuaciones diferenciales 134
Según el tipo 134
Según el orden 134
Según linealidad o no linealidad 134
Solución de una ecuación diferencial 135
6.2 Ecuaciones diferenciales de primer orden 135
Métodos de solución 135
Método de separación de variables 136

Método de los coeficientes homogéneos ... 136
Ecuaciones exactas ... 137
Ecuaciones lineales ... 139
6.3 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior ... 140
Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes de orden superior ... 140
Ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes constantes de orden superior ... 143
Método de variación de parámetros ... 143
6.4 Aplicaciones ... 144
Problemas de crecimiento y decrecimiento ... 144
Problemas de transferencia de calor: Enfriamiento ... 144
Circuitos eléctricos ... 145
Circuitos L-R en serie ... 145
Circuitos R-C en serie ... 146
Problemas de mezclas ... 147

Problemas resueltos

Capítulo 1
Vectores y la geometría del espacio ... 153

Capítulo 2
Funciones vectoriales ... 191

Capítulo 3
Funciones de varias variables ... 211

Capítulo 4
Integración múltiple ... 241

Capítulo 5
Integración de campos vectoriales ... 287

Capítulo 6
Ecuaciones diferenciales ... 297

Prólogo

El hecho de haber impartido la asignatura **Cálculo de Varias Variables** en múltiples ocasiones, a lo largo de muchos años de experiencia docente, nos ha permitido observar de cerca las complicaciones a las que normalmente se enfrentan los estudiantes; que van desde la dificultad de imaginar con claridad el espacio tridimensional, con su correspondiente representación gráfica en una hoja de cuaderno (considerado un espacio bidimensional), hasta la carencia de conocimientos básicos del cálculo de una variable. Lo anterior ha sido fundamental para replantearnos la forma en que debe iniciarse y desarrollarse en forma óptima el curso de una asignatura de esta naturaleza, pero en especial para replantearnos la manera en que puede atraparse, cautivarse y mantenerse la atención de los estudiantes. En forma personal, creemos que el presente curso de **Cálculo de Varias Variables** es una invaluable oportunidad de enseñar a los estudiantes, al fin, las matemáticas en el espacio que nos rodea (de tres dimensiones), ya que éste es el momento idóneo para pasar de la comprensión de un espacio plano a uno tridimensional o más dimensiones, para lo cual resulta indispensable el apoyo de la presente obra.

El libro *Cálculo de varias variables* tiene como objetivo ofrecer una comprensión clara de los tópicos del cálculo de varias variables, en forma simple y sintética, sin abandonar el tratamiento clásico (y en algunas ocasiones riguroso) de los teoremas más importantes. Con base en esa premisa, al final de cada uno de los seis capítulos se incluye una sección de Problemas propuestos con diferentes grados de dificultad, con el propósito de que el lector los resuelva por sí mismo, basado en los conocimientos adquiridos a lo largo de cada capítulo, y cuya solución puede consultarse al final de la obra con la solución detallada de cada uno de los problemas propuestos. Lo anterior hace que este material sea de gran valor para todos aquellos estudiantes que necesitan aprender y dominar el cálculo multivariable.

Este libro está dividido en seis capítulos, de tal forma que puede usarse para cubrir los planes de estudio de cursos semestrales, además de que también contiene material adicional para cursos posteriores.

En el capítulo 1 se ofrece una introducción a los vectores y al espacio de tres dimensiones, donde se describe con claridad la manera de impulsarse a la tercera dimensión geométrica.

En el capítulo 2 se describen las funciones vectoriales como una alternativa para generar gráficos en dos y tres dimensiones. De igual forma, también se definen los vectores tangente y normal unitarios, así como el concepto de curvatura de una función vectorial. Lo anterior para describir de mejor forma el movimiento de un objeto a lo largo de trayectorias curvilíneas.

El capítulo 3 aborda las funciones de varias variables, retomando los conceptos de dominio e imagen, vistos en el curso de Cálculo de Una Variable. De igual forma, en éste se trata el concepto de límite para estas funciones, así como las derivadas parciales y direccionales.

En el capítulo 4 se trata la integración múltiple, haciendo una clara correspondencia entre la integral simple y su interpretación geométrica (área bajo una curva) y la integral doble con su correspondiente interpretación (volumen bajo una superficie). Asimismo, se presentan algunos tipos de sistemas de coordenadas y se muestra su utilidad en el cálculo de integrales dobles y triples. Por último, al final del capítulo se hace una clara referencia a las aplicaciones de las integrales múltiples en diferentes problemas de ingeniería.

El capítulo 5 muestra el concepto de campo vectorial y se inicia con el concepto de trabajo mecánico realizado por una fuerza constante en magnitud y dirección, para posteriormente determinar el trabajo realizado por un campo a lo largo de una trayectoria dada, mediante la definición de integral de línea.

En el capítulo 6 se presenta una introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias, en el que se ofrece su definición y una clara clasificación de éstas. Asimismo, también se tratan los métodos clásicos de solución para las ecuaciones de primer orden y se abordan las ecuaciones lineales de orden superior; es muy importante mencionar que en este capítulo solo se presentan los métodos de solución, dejando de lado un tratamiento formal, el cual puede ser abordado en un libro exclusivo de este tema.

Es importante que el estudiante tome conciencia de la forma en la que debe abordar esta obra, pues sin duda es primordial tener papel y lápiz a la mano mientras se estudia el libro, ya que de esta manera los cálculos realizados en los problemas resueltos serán mejor entendidos si el lector los realiza al mismo tiempo.

Esperamos que esta obra sea una novedosa oportunidad para aprender la materia con la ayuda de un gran número de problemas resueltos, si esto se consigue, nos sentiremos muy contentos de haber logrado este objetivo; no obstante, estaremos plenamente satisfechos cuando el lector en realidad haya disfrutado esta obra.

Dr. Ignacio Ramírez V.
Dr. Luis Manuel Palacios P.

Capítulo 1

Vectores y la geometría del espacio



Competencias específicas a desarrollar

- Comprende el concepto de vector en dos y tres dimensiones, junto con sus componentes rectangulares.
- Identifica la manifestación de un vector en distintos contextos.
- Resuelve con habilidad operaciones entre vectores.
- Determina ecuaciones de rectas y planos dados.
- Asocia gráficas de planos y rectas a ecuaciones dadas.
- Comprende el concepto de superficie cuadrática.

1.1 Vectores en dos dimensiones

Introducción

En la vida cotidiana hay cantidades que para poder ser comprendidas necesitan expresarse con determinadas características; por ejemplo, cuando se dice que un objeto se mueve a 100 km/h, no es posible conocer la forma en que se desplaza, es decir, no se sabe si está en movimiento rectilíneo o curvilíneo, y mucho menos se puede conocer si lleva alguna dirección específica (norte, sur, etc.). Lo mismo sucede cuando se aplica una fuerza a un cuerpo, pues esta información no es suficiente para saber la condición de carga de dicho cuerpo (es decir, si se trata de fuerza de tensión, de compresión, etc.). Por lo anterior, las cantidades o expresiones numéricas que requieren que se exprese magnitud, dirección y sentido para comprenderse por completo se llaman vectores. Por tanto, un vector tiene diversas propiedades que hacen que se pueda desarrollar un álgebra distinta: el álgebra vectorial.

Actividad de aprendizaje

En equipos de dos o tres alumnos investiguen en diferentes fuentes cómo surgió y se desarrolló el cálculo de varias variables y cuáles son sus aplicaciones. Con la información recabada, elaboren un ensayo en el que expongan la historia del cálculo de varias variables, con énfasis

en los contextos económico, político y cultural que prevalecían en el tiempo en que se desarrolló y en el que expliquen las aplicaciones de las funciones de varias variables.

En el espacio bidimensional, los vectores se representan con una flecha, cuyo tamaño indica la magnitud, la punta el sentido y el ángulo la dirección (véase figura 1.1).

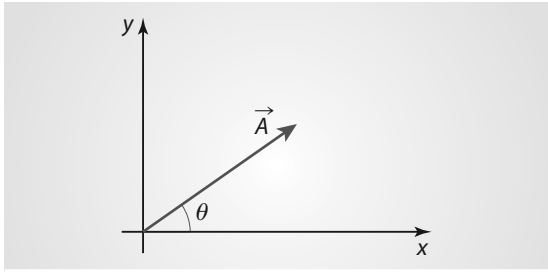


Figura 1.1

La fuerza, velocidad y aceleración son cantidades vectoriales. Por tanto, cuando se dibuja un vector (por ejemplo, una fuerza), se puede observar que éste tiene dos efectos en el plano bidimensional: un efecto (o jalón) horizontal y un efecto (o jalón) vertical, los cuales reciben el nombre de componentes rectangulares y son una manera de representar a un vector en forma simplificada (véase figura 1.2).

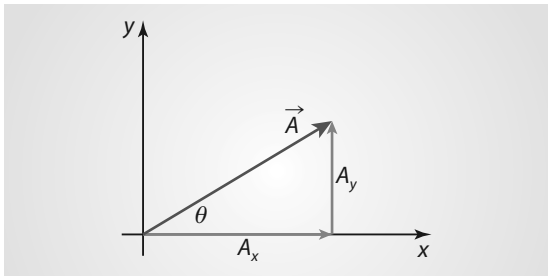


Figura 1.2

Por tratarse de los catetos opuesto y adyacente de un triángulo rectángulo, las componentes en las direcciones horizontal y vertical pueden encontrarse a partir de las funciones trigonométricas seno y coseno como sigue:

$$A_x = \left\|\vec{A}\right\| \cos\theta$$
$$A_y = \left\|\vec{A}\right\| \operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(1.1)}$$

Por su parte, la magnitud del vector y su dirección se pueden determinar a partir de las componentes mediante el uso del teorema de Pitágoras y la función tangente como sigue:

$$\left\|\vec{A}\right\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$
$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \qquad \textbf{(1.2)}$$

Los vectores también pueden ser representados en la forma:

$$\vec{A} = \langle a_1, a_2 \rangle \qquad \textbf{(1.3)}$$

donde a_1 y a_2 son las componentes en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente.

Los vectores pueden sumarse entre sí al adicionar sus componentes correspondientes, esto es, al sumar los efectos en las direcciones horizontal y vertical. De igual modo, los vectores se pueden multiplicar por un escalar al hacer que el vector se magnifique tantas veces como lo indique dicho escalar. Lo anterior puede escribirse de la siguiente manera:

a) *Adición de vectores*

Sean $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ dos vectores en el plano. Entonces,

$\vec{a} + \vec{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

b) *Multiplicación de vectores por escalares*

Si $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ es un vector en el plano y c es un escalar, entonces $c\vec{a} = \langle ca_1, ca_2 \rangle$

Es importante resaltar que en muchas ocasiones la determinación de un vector debe hacerse a partir de dos puntos dados, por lo que es posible escribir sus componentes restando sus coordenadas (véase figura 1.3).

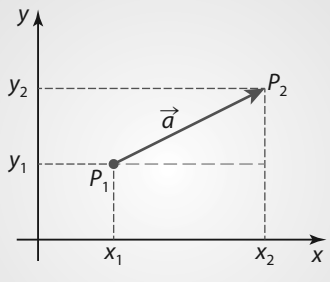


Figura 1.3

Lo anterior puede enunciarse a partir del siguiente teorema:

TEOREMA 1.1

Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos, entonces el vector $\vec{a}$ en V_2, que corresponde a P_1P_2, es

$$\vec{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle \qquad (1.4)$$

Por su parte, el siguiente teorema muestra algunas propiedades de los vectores operándose entre sí.

TEOREMA 1.2

Para los vectores con sus componentes en dos dimensiones se puede escribir:

i) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (1.5)

ii) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (1.6)

iii) $\vec{a} + 0 = \vec{a}$ (1.7)

iv) $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$ (1.8)

La siguiente definición permite establecer si dos vectores tienen la misma dirección o una dirección contraria.

Definición 1.1

Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ diferentes de cero en V_2 tienen:

i) la misma dirección si $\vec{b} = c\vec{a}$ para $c > 0$.

ii) dirección opuesta si $\vec{b} = c\vec{a}$ para $c < 0$.

Los vectores cartesianos. Vectores unitarios

Como ya se mencionó, un vector se representa en forma gráfica como una flecha con una dirección y un sentido definidos. En forma matemática, un vector se expresa al definir cierto tipo de vectores encargados de darle la dirección específica a cada componente; estos vectores reciben el nombre de vectores unitarios y se definen como sigue.

Definición 1.2

Los vectores unitarios son aquellos que tienen una magnitud igual a la unidad, son adimensionales en la dirección horizontal y vertical (ver figura 1.4) y se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{i}} = \langle 1, 0 \rangle \qquad \hat{\mathbf{j}} = \langle 0, 1 \rangle \tag{1.9}$$

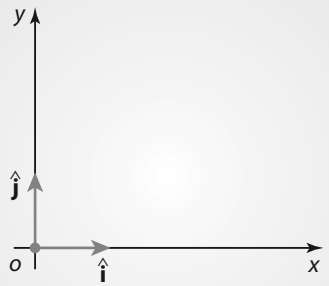


Figura 1.4

Una vez que se han definido los vectores unitarios, se puede escribir cualquier vector como una combinación lineal de los vectores unitarios como sigue:

Si $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ es un vector en V_2, entonces:

$$\vec{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} \tag{1.10}$$

En la figura 1.5 se muestra la representación de esta combinación lineal.

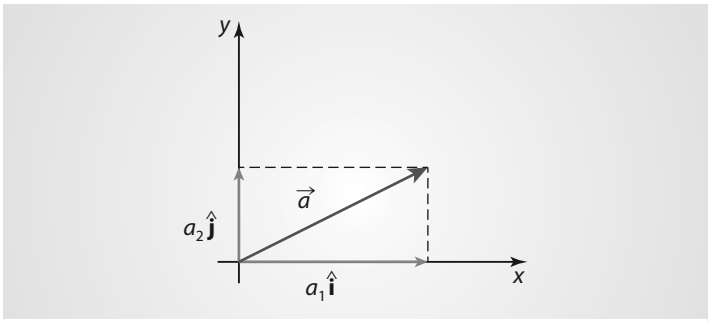


Figura 1.5

Es importante destacar que los vectores unitarios pueden definirse para cualquier dirección dada. El siguiente teorema describe la forma de encontrar un vector unitario en cualquier dirección.

Teorema 1.3

Si $\vec{a}$ es un vector diferente de cero, entonces un vector unitario $\vec{u}$ puede definirse con la misma dirección de $\vec{a}$ por medio de:

$$\vec{a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|}\hat{\mathbf{i}} + \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}\hat{\mathbf{j}} \qquad (1.11)$$

donde $\|\vec{a}\|$ representa el módulo o magnitud del vector.

1.2 Vectores en tres dimensiones

El espacio tridimensional

Hasta aquí se ha tratado el sistema de coordenadas cartesiano en dos dimensiones, pero como es sabido, el espacio en que vivimos es tridimensional, y por tanto es indispensable aprender a trabajar en éste. La figura 1.6 muestra tres planos mutuamente perpendiculares, en los que es posible apreciar que el punto de intersección representa el origen de coordenadas, a diferencia del espacio bidimensional (en el cual aparecían cuatro cuadrantes), ahora el espacio está dividido en ocho partes, llamados octantes.

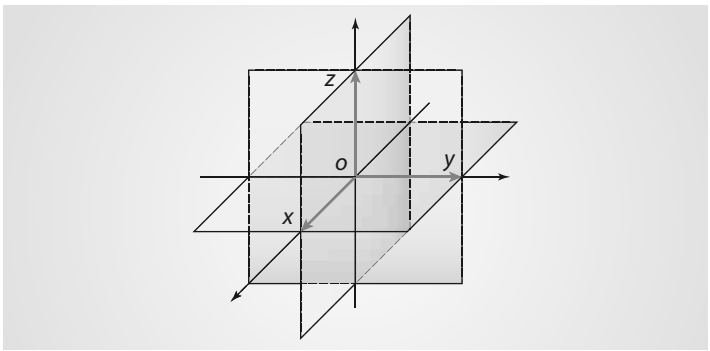


Figura 1.6

No obstante lo expuesto antes, para casos prácticos es más conveniente dibujar solo un octante (el primero), en el que es posible apreciar los tres ejes positivos (véase figura 1.7).

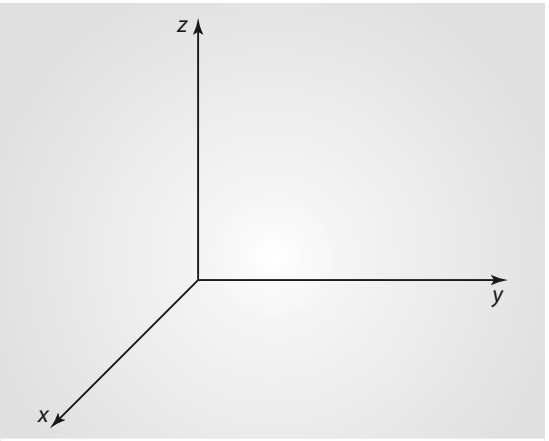


Figura 1.7

Como es de suponer por sus características, en este espacio un vector tiene tres componentes (una en cada eje), por lo que resulta necesario representarlo en el espacio tridimensional. En la figura 1.8 se observa un vector con sus tres componentes en tres dimensiones. Es importante notar que ahora será necesario definir tres ángulos, con el fin de especificar su dirección.

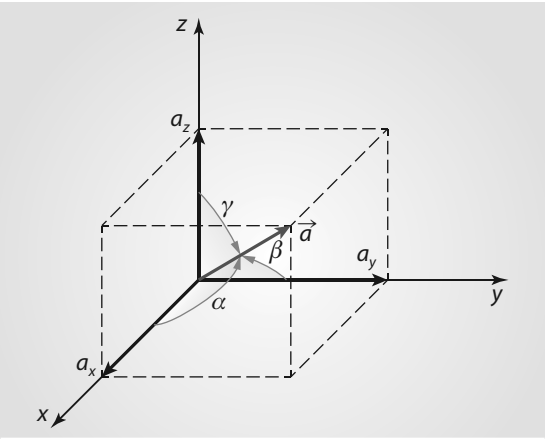


Figura 1.8

En este caso, como se observa en la figura 1.8, los ángulos α, β y γ no son complementarios ni suplementarios (como ocurre en dos dimensiones), por lo que éstos solo dependen de la magnitud de sus componentes y del vector dado.

Ahora, para determinar las componentes del vector es necesario trazar algunas diagonales en determinadas caras del paralelepípedo que se muestra en la figura 1.9, con el fin de encontrar las relaciones entre las componentes y el vector resultante, tal como se muestra a continuación.

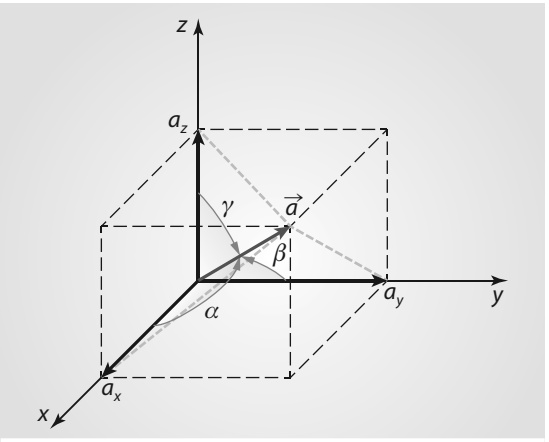


Figura 1.9

Como se ve en la figura 1.9, los triángulos que se forman son rectángulos y todos ellos tienen al vector resultante como la hipotenusa. De lo anterior se deduce que:

$$a_x = \|\vec{a}\| \cos\alpha$$
$$a_y = \|\vec{a}\| \cos\beta \qquad \textbf{(1.12)}$$
$$a_x = \|\vec{a}\| \cos\gamma$$

Para determinar el módulo del vector como función de sus componentes es necesario recurrir a la figura 1.10, en donde se puede observar que ya se han formado dos triángulos rectángulos. De este modo, si se escribe el teorema de Pitágoras para cada triángulo y se realiza una combinación de ambas relaciones, se puede notar lo siguiente:

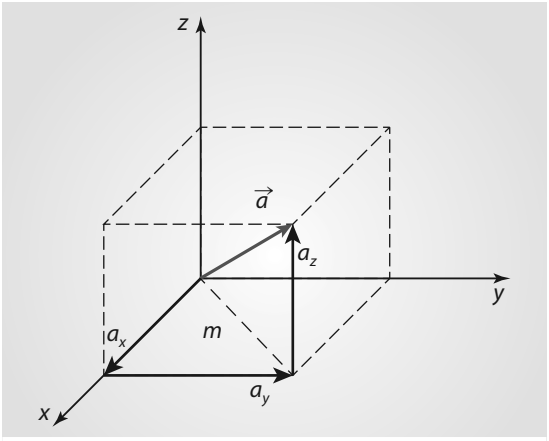


Figura 1.10

$$m^2 = a_x^2 + a_y^2$$
$$\|\vec{a}\|^2 = m^2 + a_z^2 \qquad \textbf{(1.13)}$$
$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Geometría de los vectores en tres dimensiones

En esta sección se exponen diversas definiciones y relaciones geométricas de los vectores en tres dimensiones que son de gran utilidad a lo largo de toda esta obra. Como se verá, dichas definiciones y relaciones son una consecuencia de las expresiones vistas para el espacio bidimensional.

En el espacio cartesiano, la distancia entre dos puntos, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, puede escribirse como:

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad \textbf{(1.14)}$$

Definición de un vector en V_3

El espacio vectorial V_3 (de tres dimensiones) es el conjunto de todas las ternas ordenadas $\langle x, y, z\rangle$ de números reales llamados vectores, tales que si $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ y c es un escalar, entonces:

i) $\vec{a} + \vec{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\rangle$

ii) $c\vec{a} = \langle ca_1, ca_2, ca_3\rangle$

Teorema 1.4

Si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos cualesquiera, entonces el vector $\vec{a}$ en V_3 corresponde a $\overrightarrow{P_1P_2}$ (véase figura 1.11) y se escribe:

$$\vec{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle \qquad \textbf{(1.15)}$$

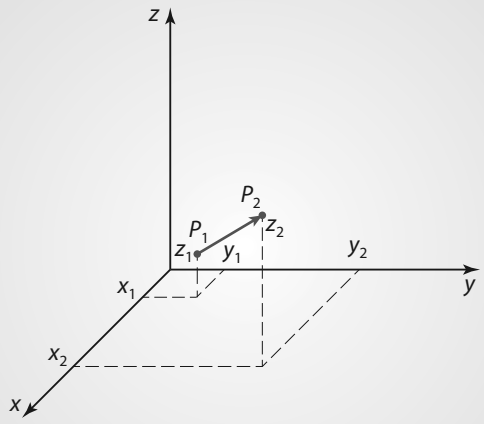


Figura 1.11

Fórmula del punto medio

Las coordenadas del **punto medio** del segmento que va de $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ se pueden encontrar con la fórmula siguiente:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) \qquad \textbf{(1.16)}$$

Vectores unitarios

Del mismo modo que se trabajó en dos dimensiones, los vectores unitarios se pueden definir como sigue (véase figura 1.12):

$$\hat{\mathbf{i}} = \langle 1, 0, 0\rangle \qquad \hat{\mathbf{j}} = \langle 0, 1, 0\rangle \qquad \hat{\mathbf{k}} = \langle 0, 0, 1\rangle \qquad \textbf{(1.17)}$$

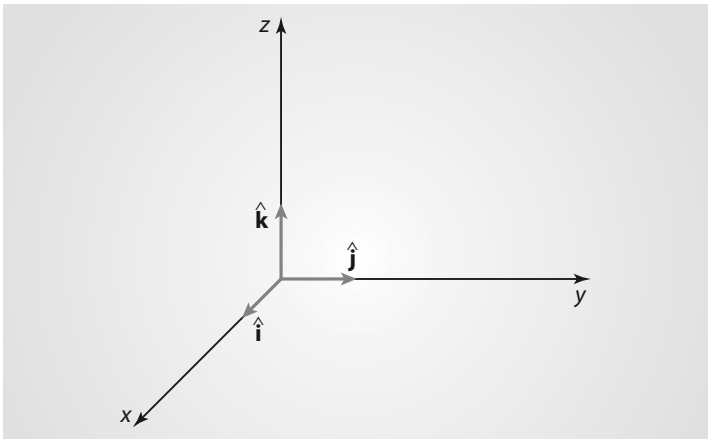


Figura 1.12

Asimismo, cualquier vector $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ puede expresarse como una combinación lineal de $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$. Ver figura 1.13.

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}} \qquad \textbf{(1.18)}$$

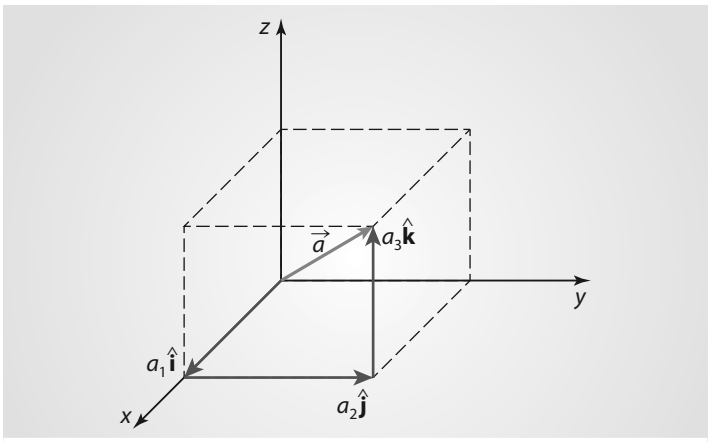


Figura 1.13

VECTOR UNITARIO EN TRES DIMENSIONES

De la misma forma en que se definió en dos dimensiones a los vectores unitarios generales (es decir que no están dirigidos hacia algún eje cartesiano en especial), en tres dimensiones un vector dado se define como sigue:

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}$$

Es importante destacar que cada vector unitario general tiene un vector unitario asociado, cuya magnitud es igual a la unidad y es adimensional. Dicho vector se representa por:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \qquad \textbf{(1.19)}$$

o bien por:

$$\vec{u} = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|}\hat{\mathbf{i}} + \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}\hat{\mathbf{j}} + \frac{a_3}{\|\vec{a}\|}\hat{\mathbf{k}} \qquad \textbf{(1.20)}$$

1.3 Producto escalar (o producto punto)

Como se dijo antes, los vectores pueden sumarse y multiplicarse por un escalar; sin embargo, hasta ahora no se ha definido la multiplicación de vectores. Por tal motivo, en esta sección se explican y definen dos tipos de productos entre vectores: producto escalar y producto vectorial.

Es muy importante destacar que el hecho de que haya dos productos obedece a las necesidades de calcular determinadas cantidades físicas, tanto en mecánica como en electromagnetismo.

Se inicia con el producto escalar.

Definición 1.3

Sean dos vectores en V_3. El producto escalar se denota mediante $\vec{a}\cdot\vec{b}$ de los vectores $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, y se define como:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

o bien,

$$= \langle a_1, a_2, a_3\rangle \cdot \langle b_1, b_2, b_3\rangle$$
$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

El producto escalar tiene las siguientes propiedades:

i) $\vec{a}\cdot\vec{a} = \|a\|^2$

ii) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

iii) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

iv) $\left(c\vec{a}\right)\cdot\vec{b} = c\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\left(c\vec{b}\right)$

v) $0\cdot\vec{a} = 0$

Ángulo entre dos vectores

Existe una forma alterna de definir el producto escalar a partir del ángulo entre los vectores que se están multiplicando, lo cual es de gran importancia para determinar condiciones de perpendicularidad entre dos vectores. El siguiente teorema es muy importante para mostrar lo expuesto antes.

Teorema 1.5

Si θ es el ángulo entre dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ entonces (véase figura 1.14):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\theta \qquad (1.21)$$

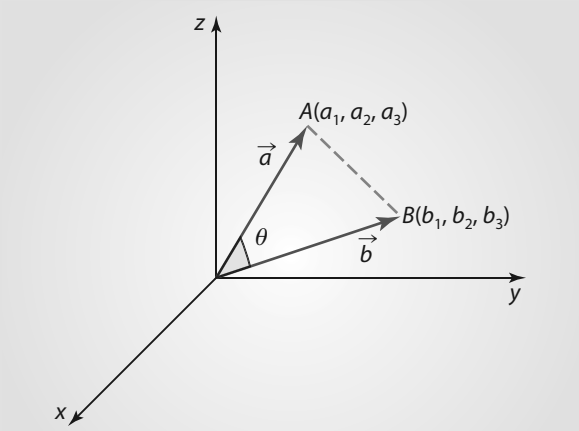


Figura 1.14

La demostración de este teorema puede realizarse a partir del teorema de cosenos, usando la primera definición de producto escalar vista antes. A partir del resultado anterior se pueden escribir los teoremas siguientes:

Teorema 1.6

Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales si y solo si:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \qquad (1.22)$$

Teorema 1.7

Dos vectores son paralelos si y solo si uno de ellos es múltiplo del otro.

Proyección escalar

El producto escalar permite encontrar la proyección de un vector sobre otro de manera sencilla, y cuyo resultado es de gran importancia en mecánica y electromagnetismo.

De la figura 1.15 se puede deducir que dados dos vectores, es posible encontrar la proyección de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$ como sigue:

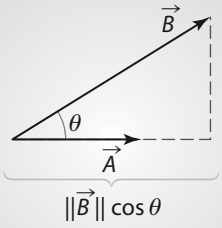


Figura 1.15

La proyección escalar es el cateto adyacente del triángulo rectángulo que se forma en la figura 1.15, el cual puede obtenerse como sigue:

$$\text{Proyección escalar} = \left\|\vec{B}\right\| \cos\theta \tag{1.23}$$

Recordando que el producto escalar se puede escribir como:

$$\left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\| \cos\theta = \vec{A} \cdot \vec{B}$$

entonces:

$$\left\|\vec{B}\right\| \cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\left\|\vec{A}\right\|}$$

Por último,

$$\text{Proyección escalar} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\left\|\vec{A}\right\|} \tag{1.24}$$

Proyección vectorial

Como se puede observar, la proyección obtenida en la sección anterior es escalar, es decir, no tiene una dirección especificada. Una forma de darle dirección y convertirla en una proyección vectorial es multiplicar la proyección escalar por el vector unitario en la dirección de la proyección; lo anterior significa que si la dirección de la proyección se encuentra a lo largo del vector $\vec{A}$ entonces la proyección vectorial será:

$$\text{Proyección vectorial} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\left\|\vec{A}\right\|} \underbrace{\frac{\vec{A}}{\left\|\vec{A}\right\|}}_{\text{Vector unitario}} = \frac{\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)\vec{A}}{\left\|\vec{A}\right\|^2} \tag{1.25}$$

1.4 Aplicación física del producto escalar. Trabajo mecánico

En mecánica se sabe que si una fuerza se aplica a un cuerpo y ésta es capaz de moverlo, se produce un trabajo *W*. No obstante lo anterior, para mover dicho cuerpo es indispensable que la fuerza (o parte de ella) actúe en dirección del movimiento (véase figura 1.16).

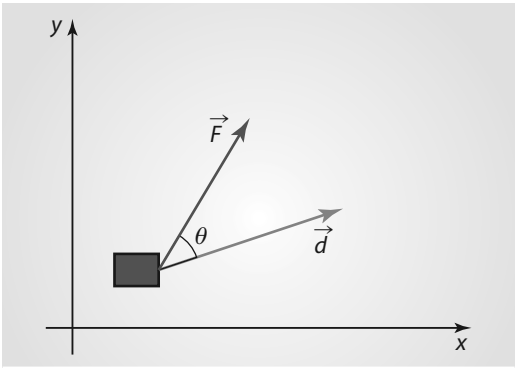


Figura 1.16

En la figura 1.16 se muestra un objeto al que se le aplica una fuerza $\vec{F}$ con una dirección θ respecto al vector desplazamiento; si el bloque logra moverse hacia una dirección $\vec{d}$ una distancia $\|\vec{d}\|$ entonces el trabajo realizado por esta fuerza puede ser calculado mediante la expresión:

$$W = \|\vec{F}\|\|\vec{d}\|\cos\theta \qquad \textbf{(1.26)}$$

Como se puede observar, la expresión para calcular el trabajo de una fuerza coincide con la definición de producto escalar entre los vectores $\vec{F}$ y $\vec{d}$ por lo que se puede escribir:

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} \qquad \textbf{(1.27)}$$

Entonces, se concluye que el producto escalar representa el trabajo mecánico de una fuerza dada $\vec{F}$ que mueve un objeto en la dirección del vector $\vec{d}$.

Actividad de aprendizaje

Con tus propias palabras define que es trabajo mecánico. Compara con tus compañeros tu definición.

1.5 Producto vectorial (o producto cruz)

Luego de tratar con detalle el producto escalar, toca el turno al producto vectorial.

Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores no paralelos. Las representaciones de los dos vectores con un mismo punto inicial determinan un plano (véase figura 1.17).

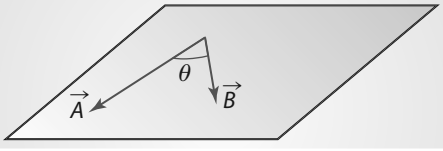


Figura 1.17

El vector perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se obtiene del producto vectorial (o cruz) entre estos vectores.

Definición 1.4

Si $\vec{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\vec{B} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$, entonces el producto vectorial de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ denotado por $\vec{A}\times\vec{B}$ está dado por:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \langle a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_2\rangle$$

Por la ecuación anterior puede deducirse que la definición de producto vectorial no es tan sencilla; sin embargo, este vector cumple con la condición de ser perpendicular al plano que forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. No obstante su complejidad, hay un recurso mnemotécnico para recordar la fórmula del producto vectorial basado en la notación de determinantes. Lo anterior puede escribirse en un arreglo cuadrado en el que las filas deben acomodarse de la forma siguiente:

- En la primera fila se ordenan los vectores unitarios.
- En la segunda fila se escriben las componentes del primer vector.
- En la tercera fila se acomodan las componentes del siguiente vector.

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} \qquad \textbf{(1.28)}$$

$$=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\hat{\mathbf{i}}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\hat{\mathbf{j}}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\hat{\mathbf{k}}$$

Esta forma de ordenar las componentes de los vectores anticipa que la multiplicación vectorial no es conmutativa, como se ve más adelante.

Al igual que en el producto escalar, el producto vectorial se puede definir en forma alternativa teniendo en cuenta el ángulo entre dos vectores. Este resultado se enuncia en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.8

Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son dos vectores en V_3 y θ es el ángulo en radianes entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$, entonces:

$$\|\vec{A}\times\vec{B}\|=\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|\,\operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(1.29)}$$

Esto significa que el módulo del producto cruz se puede obtener a partir del producto de los módulos de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ por el seno del ángulo formado entre ellos.

Del teorema anterior, y por el significado de producto cruz, se puede encontrar un criterio para determinar el paralelismo de vectores, cuyo resultado se enuncia a continuación.

TEOREMA 1.9

Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son dos vectores en V_3, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos si:

$$\vec{A}\times\vec{B}=0 \qquad \textbf{(1.30)}$$

Para demostrar que el producto vectorial es en realidad perpendicular a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, es necesario realizar una prueba de ello. En el siguiente teorema se demuestra tal resultado.

TEOREMA 1.10

Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son dos vectores en V_3, el vector $\vec{A}\times\vec{B}$ es ortogonal a $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

DEMOSTRACIÓN

Basta demostrar que:

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{A}=0 \quad \text{y} \quad \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{B}=0$$

Sea $\vec{A}=\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ $\quad \vec{B}=\langle b_1, b_2, b_3\rangle$

Entonces, se puede escribir:

$$\begin{aligned}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{A} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3 \\ &= 0\end{aligned} \qquad \textbf{(1.31)}$$

En términos geométricos, el resultado anterior implica que si dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ diferentes de cero corresponden a vectores no paralelos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ con el mismo punto inicial, entonces $\vec{A}\times\vec{B}$ corresponde a un vector $\overrightarrow{PS}$ que es perpendicular al plano determinado por *P*, *Q*, *R* (véase figura 1.18).

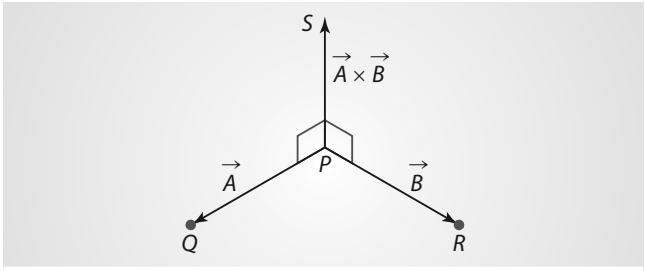


Figura 1.18

Es importante resaltar que la dirección de $\overrightarrow{PS}$ puede encontrarse usando la regla de la mano derecha.

La definición de producto vectorial (o producto cruz) permite escribir las siguientes propiedades, que en forma de teorema se pueden citar de la siguiente forma.

TEOREMA 1.11

$$\vec{A}\times\vec{A}=0$$
$$0\times\vec{A}=0 \qquad \textbf{(1.32)}$$
$$\vec{A}\times 0=0$$

De manera semejante, para los pares de vectores unitarios:

$$\begin{array}{lll} \hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}}=0 & \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}}=0 & \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}}=0 \\ \hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}}=\hat{\mathbf{k}} & \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}}=\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}}=\hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}}=-\hat{\mathbf{k}} & \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{j}}=-\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}}=-\hat{\mathbf{j}} \end{array}$$

Como se mencionó en la definición del producto vectorial, la multiplicación vectorial no es conmutativa. Esto y algunos otros resultados pueden mostrarse en los siguientes teoremas que se enuncian sin demostración.

TEOREMA 1.12

Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores en V_3:

$$\vec{A}\times\vec{B}=-(\vec{B}\times\vec{A}) \qquad (1.33)$$

Por tanto, el producto cruz no es conmutativo. De manera similar, el producto vectorial no es asociativo, como se puede ver a continuación.

$$\hat{\mathbf{i}}\times(\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}})=\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{k}}=-\hat{\mathbf{j}} \qquad (\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}})\times\hat{\mathbf{j}}=0\times\hat{\mathbf{j}}=0$$

TEOREMA 1.13

Si $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ son vectores en V_3, entonces:

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C} \qquad (1.34)$$

TEOREMA 1.14

Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores cualesquiera en V_3 y c un escalar, entonces:

i) $c\vec{A}\times\vec{B}=\vec{A}\times c\vec{B}$

ii) $c\vec{A}\times\vec{B}=c(\vec{A}\times\vec{B})$ (1.35)

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

En equipo de dos o tres personas preparen una presentación electrónica donde expliquen con detalle qué es el producto vectorial y den una aplicación en ingeniería. Expongan en clase su trabajo.

1.6 PRODUCTOS TRIPLES

A partir de las definiciones de productos escalares y vectoriales es posible definir los siguientes productos especiales (siempre y cuando se puedan encontrar), llamados productos triples: **triple producto escalar** y **triple producto vectorial**, los cuales se enuncian mediante los siguientes teoremas sin demostrar.

TEOREMA 1.15

$\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ son vectores en V_3, entonces su triple producto escalar se define como:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} \qquad (1.36)$$

TEOREMA 1.16

$\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ son vectores en V_3, entonces su triple producto vectorial se define como:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} \qquad (1.37)$$

Interpretación geométrica de productos triples

Área de un triángulo

Sean dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no nulos y no paralelos, y supóngase que éstos son lados de un paralelogramo (véase figura 1.19a).

El área de un paralelogramo es A = (base) · (altura).

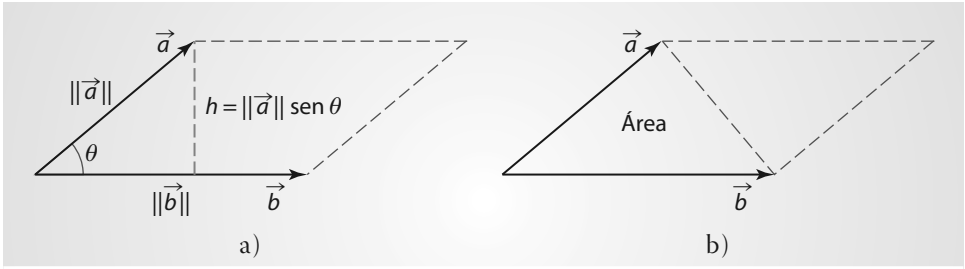


Figura 1.19

De la figura 1.19 a) se tiene:

$$A = \|\vec{b}\|\|\vec{a}\| \operatorname{sen}\theta$$

o bien,

$$A = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

De la figura 1.19 b), el área de un triángulo es:

$$A = \frac{1}{2}\|\vec{a} \times \vec{b}\| \qquad \textbf{(1.38)}$$

Volumen de un paralelepípedo

Sean los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ no nulos y no paralelos, lados de un paralelepípedo (véase figura 1.20).

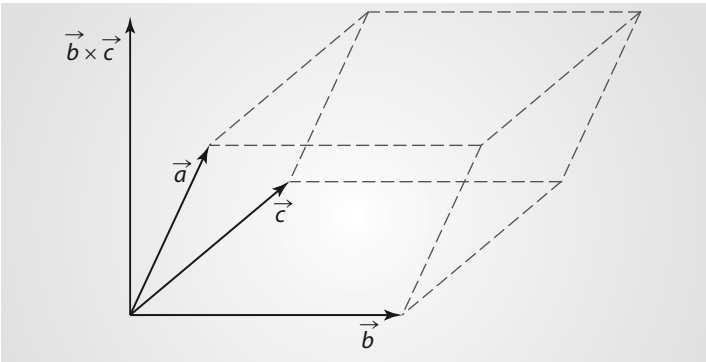


Figura 1.20

El volumen de un paralelepípedo se puede obtener a partir de:

$$V = (\text{área de la base})\ (\text{altura})$$

donde el área de la base puede obtenerse a partir del producto cruz entre los vectores que forman la base del paralelepípedo y la altura es la proyección escalar del vector $\vec{a}$ sobre el producto cruz de los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$. Lo anterior puede escribirse como:

$$V = \left\|\vec{b}\times\vec{c}\right\| \left|\text{comp}_{\vec{b}\times\vec{c}}\ \vec{a}\right|$$

$$V = \left\|\vec{b}\times\vec{c}\right\| \frac{\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|\cdot\vec{a}}{\left\|\vec{b}\times\vec{c}\right\|}$$

$$V = \left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a} \qquad \textbf{(1.39)}$$

Actividad de aprendizaje

En equipo preparen un video donde expliquen con detalle la interpretación geométrica de productos triples. Sean creativos en su trabajo. Expongan en clase su video.

1.7 Rectas en el espacio

La más simple de todas las curvas en el espacio es una recta. Para ser determinada por completo, una recta requiere un punto $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ y un vector fijo (llamado vector director):

$$\vec{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}$$

La recta en el espacio se define como el conjunto de todos los puntos P, tales que el vector $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo al vector $\vec{a}$, es decir,

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{a} \qquad \textbf{(1.40)}$$

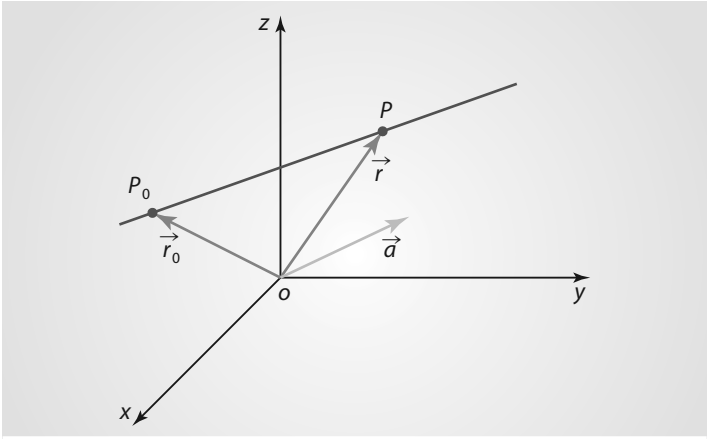


Figura 1.21

De la figura 1.21, para algún escalar *t*, llamado parámetro de la recta, si $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ y $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ son los vectores que dan la posición a *P* y P_0, respectivamente, entonces:

$$\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{r}_0 \qquad \textbf{(1.41)}$$

o bien

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$$

Si se escribe $\vec{r} = \langle x, y, z \rangle$ y $\vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, y se igualan las componentes en la última ecuación vectorial, se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_1 t \\ y &= y_0 + a_2 t \\ z &= z_0 + a_3 t \end{aligned} \qquad \textbf{(1.42)}$$

Éstas son las **ecuaciones paramétricas** de la recta que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela a un vector fijo $\vec{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}$ (llamado vector director). Es importante mencionar que el vector director no es único, pues pueden existir $K\vec{a}$ vectores directores que son paralelos a la recta dada.

Actividad de aprendizaje

Investiga en diferentes fuentes de información una ecuación paramétrica de una función que se obtenga a partir de una situación real. Explica en clase tu investigación.

Ecuaciones simétricas de la recta

Si se despeja el parámetro *t* de las ecuaciones paramétricas de la recta y se igualan (asumiendo que las componentes del vector director no son cero), se obtienen las ecuaciones simétricas de la recta:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \qquad \textbf{(1.43)}$$

1.8 Planos, cilindros, superficies de revolución y superficies cuadráticas

Planos

En el espacio tridimensional, la gráfica de una ecuación en tres variables *x*, *y*, *z* es una superficie. La superficie más simple es un plano, la cual es de tipo lineal en tres variables, cuya forma es:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Definición de un plano

Si $\vec{N}$ es un vector diferente de cero y P_0 es un punto dado, entonces el conjunto de todos los puntos P para los cuales $\overrightarrow{P_0P}$ y $\vec{N}$ son ortogonales se define como plano que pasa por P_0 y tiene a $\vec{N}$ como vector normal (véase figura 1.22).

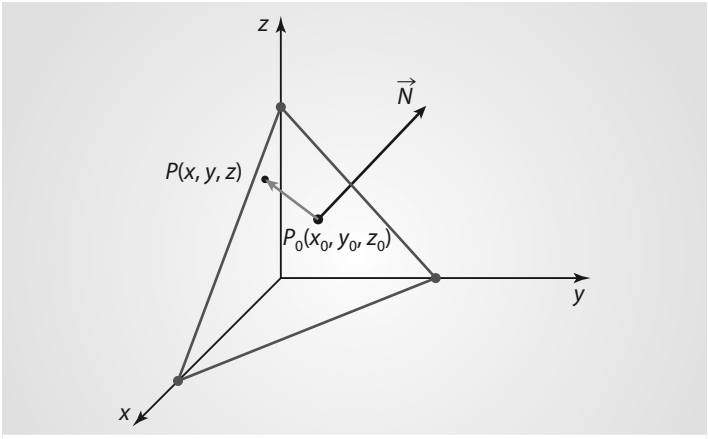


Figura 1.22

De manera análoga, como sucede en geometría analítica, es posible obtener la ecuación de una recta si se da un punto y su pendiente. Asimismo, en la geometría analítica sólida, una ecuación del plano se puede determinar si se conocen un punto sobre el mismo y la dirección de un vector normal a dicho plano. Esto se puede enunciar con el siguiente teorema.

Teorema 1.17

Si (x_0, y_0, z_0) es un punto en un plano y $\langle a, b, c\rangle$ es un vector normal al mismo, entonces la ecuación del plano puede escribirse como:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad \textbf{(1.44)}$$

Demostración

A partir de la figura 1.22 se observa que los vectores mostrados son mutuamente perpendiculares, lo que significa que el producto escalar entre ellos debe ser igual a cero:

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \langle a,b,c\rangle = 0$$

donde,

$$\left[(x-x_0)\hat{\mathbf{i}}+(y-y_0)\hat{\mathbf{j}}+(z-z_0)\hat{\mathbf{k}}\right]\cdot\left[a\hat{\mathbf{i}}+b\hat{\mathbf{j}}+c\hat{\mathbf{k}}\right]=0$$

Entonces el producto escalar queda como:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Ángulo entre dos planos

El ángulo entre dos planos se define como el ángulo entre los vectores normales de ambos planos; por lo anterior, sea $\vec{N}_1$ el vector normal de primer plano y $\vec{N}_2$ el vector normal del segundo plano. Utilizando el producto escalar entre los vectores normales, se puede concluir que el ángulo entre los dos planos puede hallarse como:

$$\cos\theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\|\vec{N}_1\|\|\vec{N}_2\|} \qquad \textbf{(1.45)}$$

Planos paralelos

Dos planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos. Lo anterior se puede escribir como:

$$\vec{N}_1 = k\vec{N}_2 \qquad \textbf{(1.46)}$$

donde *k* es un escalar.

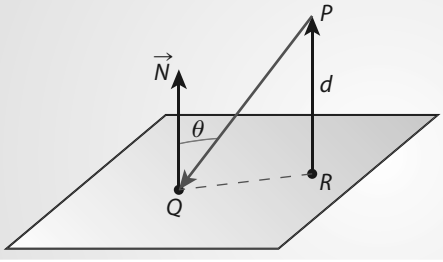
Planos normales

Dos planos son perpendiculares si y solo si sus vectores normales son ortogonales, esto es,

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0 \qquad \textbf{(1.47)}$$

Cálculo de la distancia de un punto *P* a un plano

La distancia mínima de un punto *P* a un plano puede denotarse con *d* y puede hallarse a partir del producto escalar entre el vector normal al plano y el vector *PQ*. Esta distancia constituye la proyección de *PQ* sobre el vector normal (véase figura 1.23).



Visualiza la imagen a color

Figura 1.23

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{N} = \|\overrightarrow{PQ}\|\|\vec{N}\|\cos\theta$$

$$d = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{N}}{\|\vec{N}\|} \qquad \textbf{(1.48)}$$

Cilindros

Hasta ahora se ha entendido que en el espacio bidimensional la gráfica de $x^2 + y^2 = 1$ es una circunferencia con centro en el origen; sin embargo, en el espacio de tres dimensiones es posible interpretar la gráfica como una superficie con la variable z arbitraria.

Definición de cilindro

Un cilindro es una superficie que se genera por una recta que se mueve tocando una curva dada, de tal forma que siempre queda paralela a una recta fija que no está en el plano de dicha curva. La recta que se desplaza se llama **generatriz** del cilindro y la curva plana se denomina **directriz** del cilindro.

Por tanto, se puede concluir que en el espacio tridimensional la gráfica de una ecuación respecto a dos de las tres variables (x, y, z) es un cilindro que se prolonga de manera infinita hacia el eje, que no aparece en dicha ecuación.

Ejemplos 1.1

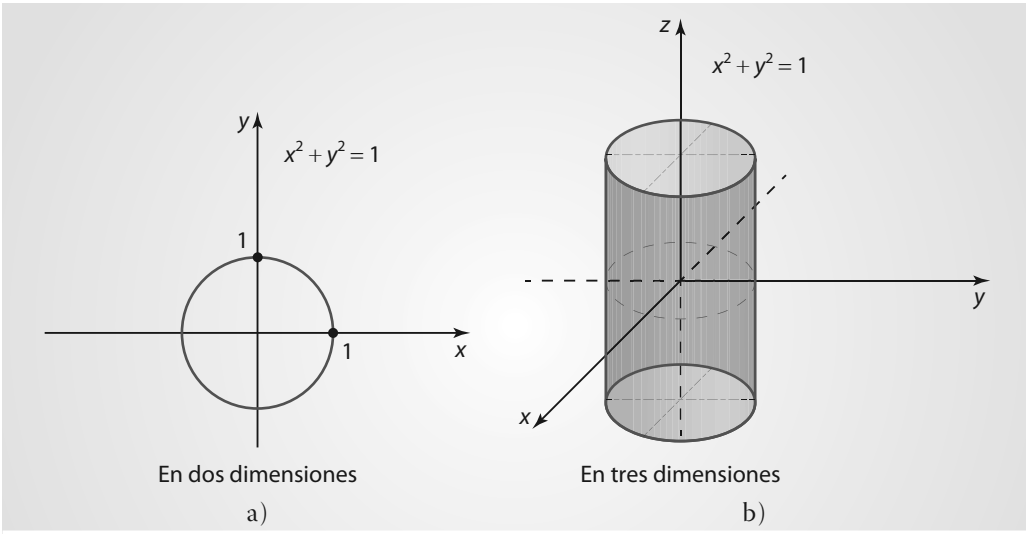


Figura 1.24

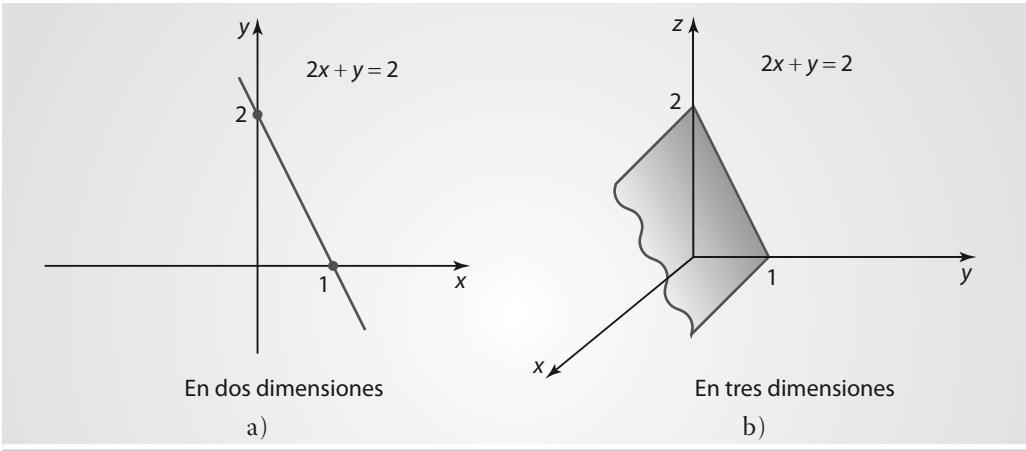


Figura 1.25

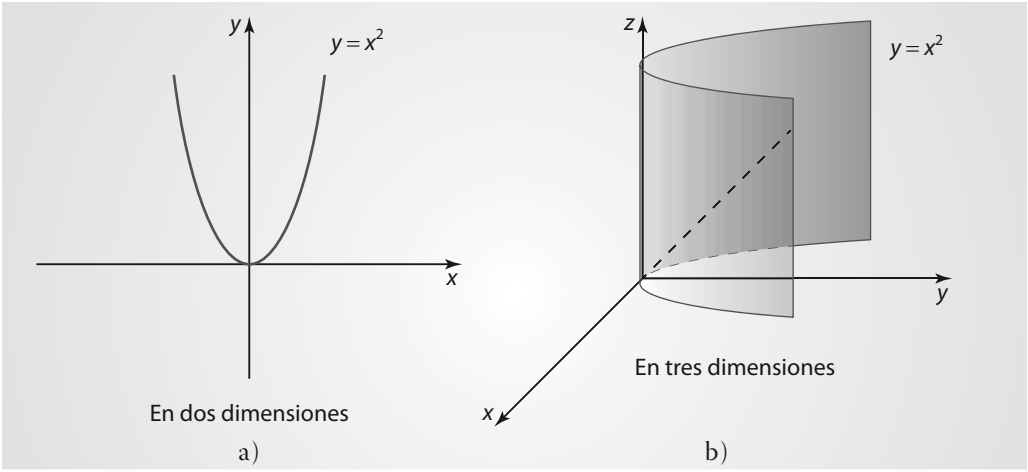


Figura 1.26

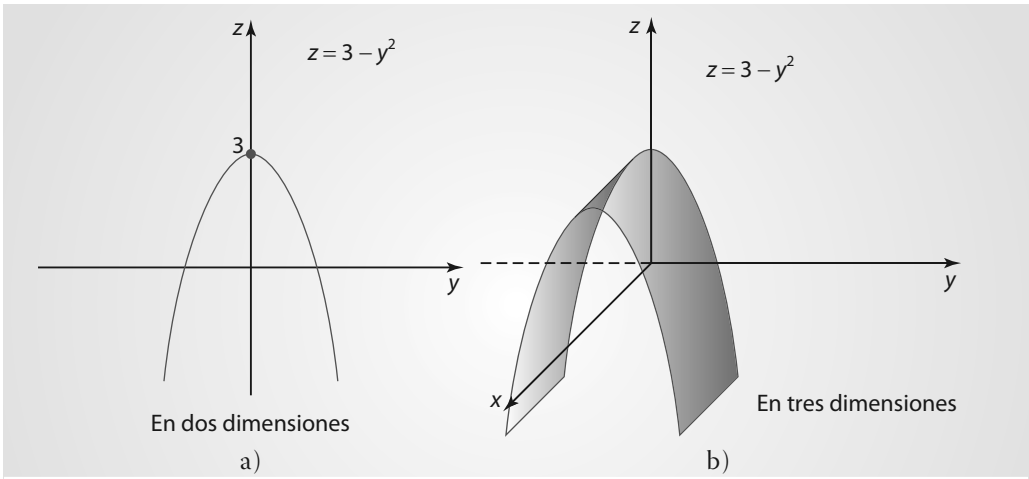


Figura 1.27

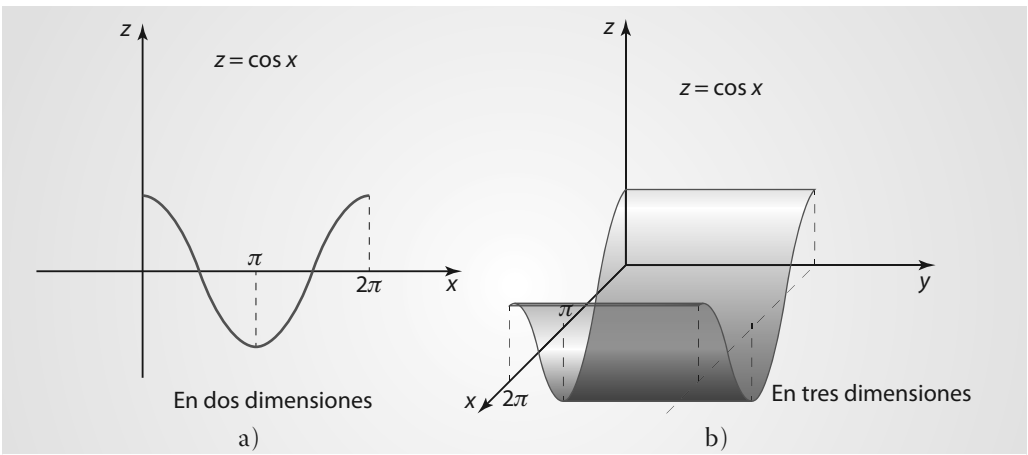


Figura 1.28

Superficies de revolución

Si una curva plana se hace girar alrededor de una recta fija que está en el plano de la curva, la superficie generada se llama **superficie de revolución**, en tanto que la recta fija se llama **eje de revolución** de la superficie y la curva plana se nombra **curva generatriz envolvente**.

En la siguiente figura se observa una superficie de revolución, cuya curva generatriz es *C* en el plano *yz* y cuyo eje es *z*.

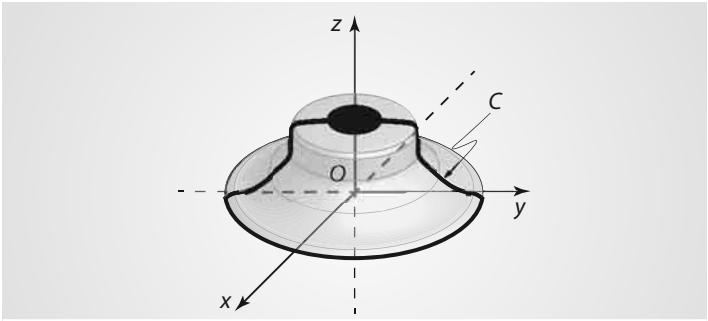


Figura 1.29

Una esfera es un ejemplo particular de una superficie de revolución, ya que ésta se genera al girar una semicircunferencia alrededor de uno de sus diámetros. Del mismo modo, cuando una recta de la forma $z = k$ en el plano *xz* se hace girar en *x* se obtiene un cilindro circular (véanse figuras 1.30 y 1.31).

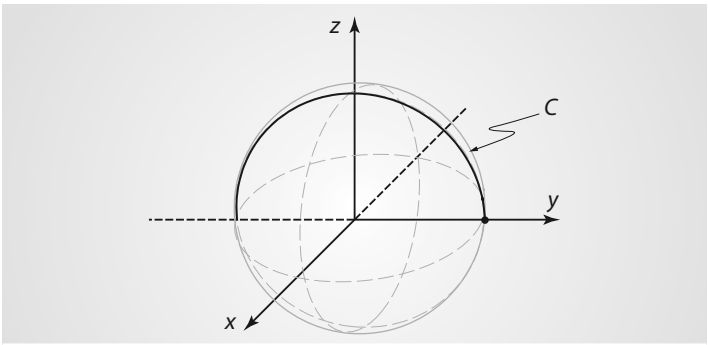


Figura 1.30

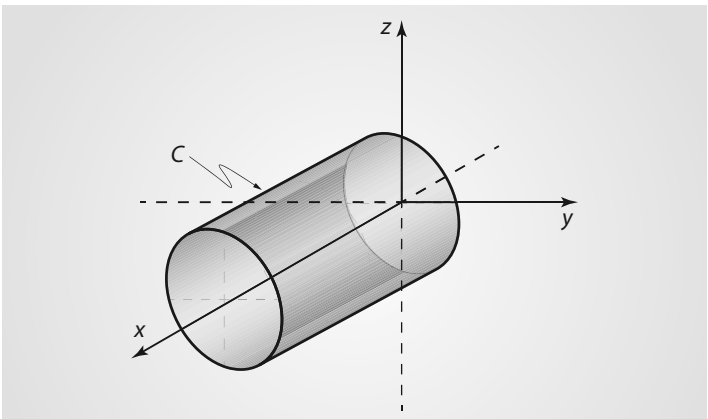


Figura 1.31

Para encontrar la ecuación de una superficie de revolución que se genera al hacer girar alrededor del eje y la curva en el plano yz, cuya ecuación bidimensional es $z = f(y)$, puede verse la figura 1.32.

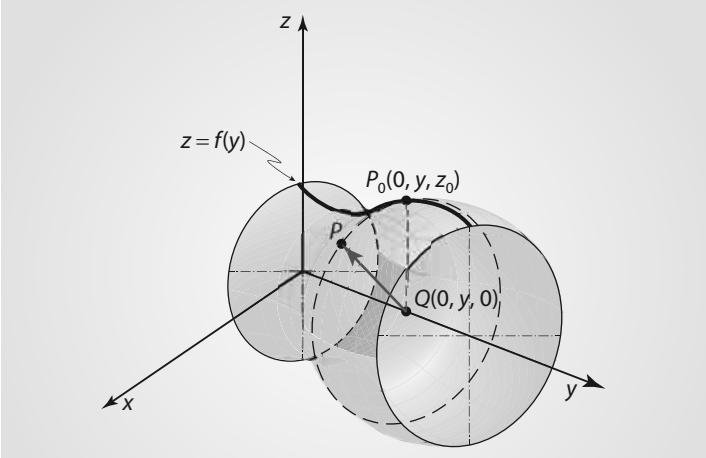


Figura 1.32

Sea $P(x, y, z)$ cualquier punto sobre la superficie de revolución. A través de P se hace pasar un plano perpendicular al eje y. El centro del círculo de revolución en ese plano perpendicular tiene las coordenadas $Q(0, y, 0)$; por tanto, sean $P_0(0, y, z_0)$ las coordenadas al punto de intersección del plano con la curva generada. Como la sección transversal de la superficie con el plano a través de P es una circunferencia, el punto P está en la superficie si y solo si:

$$\left|\overline{QP}\right|^2 = \left|\overline{QP}_0\right|^2$$

Puesto que,

$$\left|\overline{QP}\right| = \sqrt{x^2 + z^2} \qquad \text{y} \qquad \left|\overline{QP}_0\right|^2 = z_0$$

entonces puede escribirse:

$$x^2 + z^2 = z_0^2$$

Pero $z_0 = f(y)$ depende del valor de y en cualquier punto:

$$x^2 + z^2 = \left[f(y)\right]^2 \qquad \textbf{(1.49)}$$

En resumen, las gráficas de cualquiera de las siguientes ecuaciones son superficies de revolución que tienen el eje indicado:

$$x^2 + y^2 = [f(z)]^2 \qquad \text{Alrededor del eje } z \qquad \textbf{(1.50)}$$

$$x^2 + z^2 = [f(y)]^2 \qquad \text{Alrededor del eje } y \qquad \textbf{(1.51)}$$

$$y^2 + z^2 = [f(x)]^2 \qquad \text{Alrededor del eje } x \qquad \textbf{(1.52)}$$

En todos los casos, las secciones transversales de la superficie en planos perpendiculares al eje son circunferencias con centro en el eje de rotación.

Ejemplos 1.2

1. Hallar la ecuación de la superficie de revolución generada al girar la parábola $y^2 = 4x$ alrededor del eje x y trazar la gráfica de la superficie.

Solución

La curva plana es la parábola:

$$y^2 = 4x$$

Si se hace girar alrededor del eje x, se puede sustituir en:

$$y^2 + z^2 = [f(x)]^2$$
$$y^2 + z^2 = 4x$$

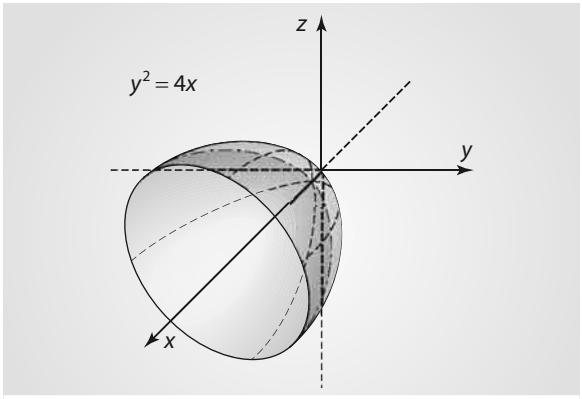


Figura 1.33

2. Trazar la gráfica de $x^2 + z^2 - 4y^2 = 0$ si $y \geq 0$.

Solución

La ecuación tiene la forma:

$$x^2 + z^2 = [f(y)]^2$$

Nótese que la curva plana gira alrededor del eje y; así, la ecuación bidimensional es de la forma:

$$z = 2y$$

Por tanto, se trata de un cono circular (véase figura 1.34).

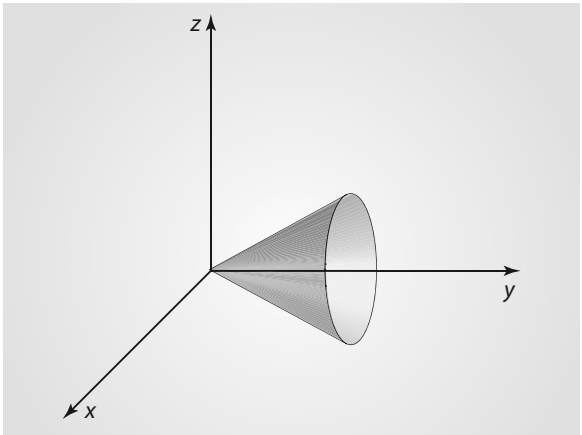


Figura 1.34

Superficies cuadráticas

En los cursos de geometría analítica plana se aborda el tema de curvas en el espacio bidimensional, conocidas con el nombre de **curvas cónicas**, las cuales pueden obtenerse a partir de la ecuación general de segundo grado:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \textbf{(1.53)}$$

La ecuación anterior contempla cónicas orientadas hacia alguno de los ejes o bien curvas que se encuentran giradas (este efecto lo produce el coeficiente B).

De manera similar, en el espacio tridimensional se puede esperar una ecuación general que permita graficar sólidos. Así, la gráfica de una ecuación de segundo grado en tres variables x, y, z tiene la forma:

$$Ax^2 + Bx^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \qquad \textbf{(1.54)}$$

Los tipos más simples de superficies cuadráticas son los cilindros parabólicos, elípticos e hiperbólicos antes descritos. No obstante, hay otros seis tipos de superficies cuadráticas que aparecen en diversas aplicaciones.

Los gráficos en el espacio de tres dimensiones se pueden determinar a partir de curvas planas llamadas trazas, que es cada una de las marcas que deja el sólido en los planos *xy*, *yz* y *xz*. Las trazas se obtienen haciendo cero alguna de las variables en la ecuación del sólido. Para comprender mejor lo anterior es importante mencionar que las tres trazas representan la estructura o esqueleto del sólido que habrá de graficarse.

A continuación se detallan algunas de las superficies cuadráticas típicas con sus correspondientes trazas.

Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Plano coordenado	Traza
xy ($z = 0$)	Elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
xz ($y = 0$)	Elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
yz ($x = 0$)	Elipse $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

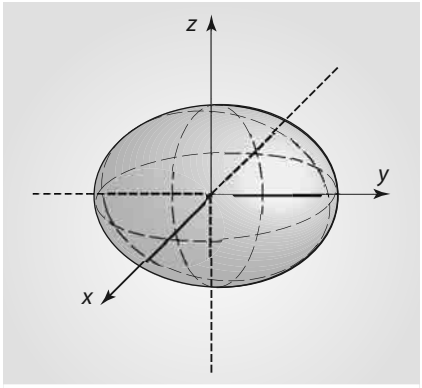


Figura 1.35

Hiperboloide de un manto

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Plano coordenado	Traza
xy ($z = 0$)	Elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
xz ($y = 0$)	Hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
yz ($x = 0$)	Hipérbola $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

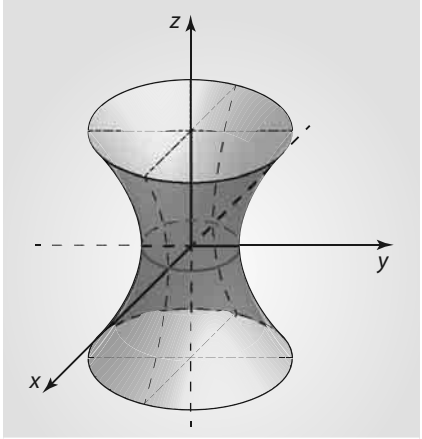


Figura 1.36

Hiperboloide de dos mantos

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Plano coordenado	Traza
xy ($z=0$)	Hipérbola $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
xz ($y=0$)	Ninguna
yz ($x=0$)	Hipérbola $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

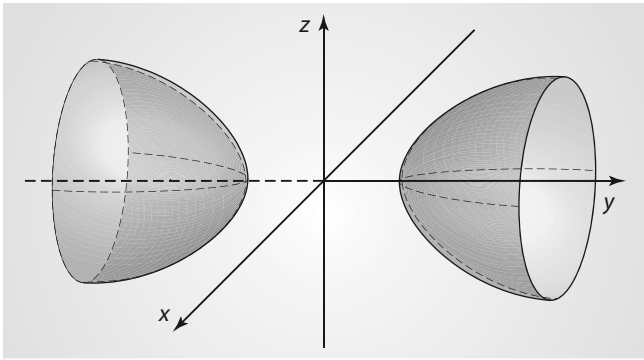


Figura 1.37

Paraboloide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$$

Plano coordenado	Traza
xy ($z=0$)	Punto (0, 0, 0)
xz ($y=0$)	Parábola $\frac{x^2}{a^2}=cz$
yz ($x=0$)	Parábola $\frac{y^2}{b^2}=cz$

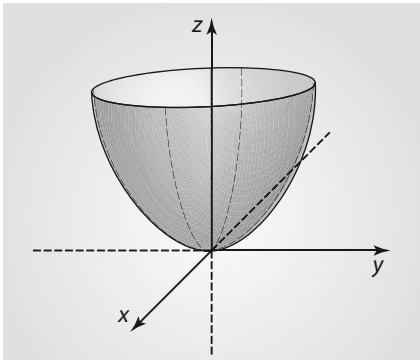


Figura 1.38

Paraboloide hiperbólico

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=cz$$

Plano coordenado	Traza
xy ($z=0$)	Rectas $y=\pm\frac{b}{a}x$
xz ($y=0$)	Parábola $\frac{x^2}{a^2}=cz$
yz ($x=0$)	Parábola $-\frac{y^2}{b^2}=cz$

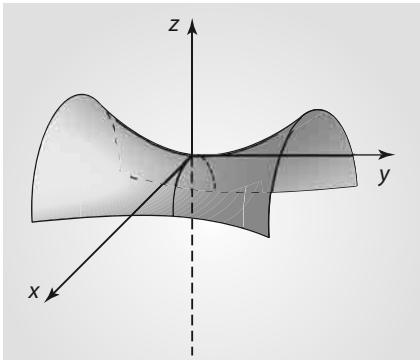


Figura 1.39

Cono elíptico

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

Plano coordenado	Traza
xy ($z = 0$)	Punto (0, 0, 0)
xz ($y = 0$)	Rectas $z=\pm\frac{c}{a}x$
yz ($x = 0$)	Rectas $z=\pm\frac{c}{b}y$

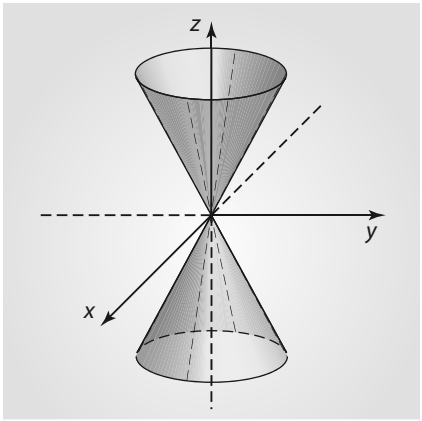


Figura 1.40

Orientación de las superficies

El intercambio de posición de las variables con sus correspondientes signos en las ecuaciones anteriores no altera la naturaleza básica de una superficie, pero sí cambia la orientación de la superficie en el espacio.

Por ejemplo:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{y} \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

son aún hiperboloides de un manto, solo que la primera se orienta hacia el eje y y la segunda hacia el eje x; el signo distinto en cada ecuación permite determinar la correcta orientación del sólido.

Problemas para resolver

Resuelve con detalle cada uno de los siguientes problemas. Las soluciones las puedes verificar al final del texto.

1.1 Calcular el coseno del ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

$\vec{a}=-4\hat{\mathbf{i}}+8\hat{\mathbf{j}}-3\hat{\mathbf{k}}$

$\vec{b}=2\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$

1.2 La magnitud y la dirección de una fuerza están dadas por el vector $\vec{a}$. Calcular el trabajo realizado cuando el punto de aplicación se mueve de P a Q.

$\vec{a}=-\hat{\mathbf{i}}+5\hat{\mathbf{j}}-3\hat{\mathbf{k}}$, $P(4, 0, -7)$, $Q(2, 4, 0)$.

1.3 Una persona tira de una vagoneta sobre un terreno horizontal, ejerciendo una fuerza de **20 N** aplicada a 30°. Calcular el trabajo realizado cuando la vagoneta recorre 100 m (véase figura 1.41).

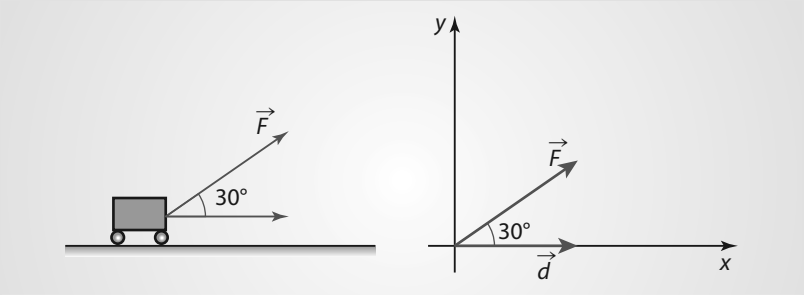


Figura 1.41

1.4 Una caja rectangular tiene longitud *a*, anchura *b* y altura *c*. Sea *P* el centro de la caja. Usar vectores para encontrar una expresión del ángulo *APB* en términos de *a*, *b* y *c* (véase figura 1.42).

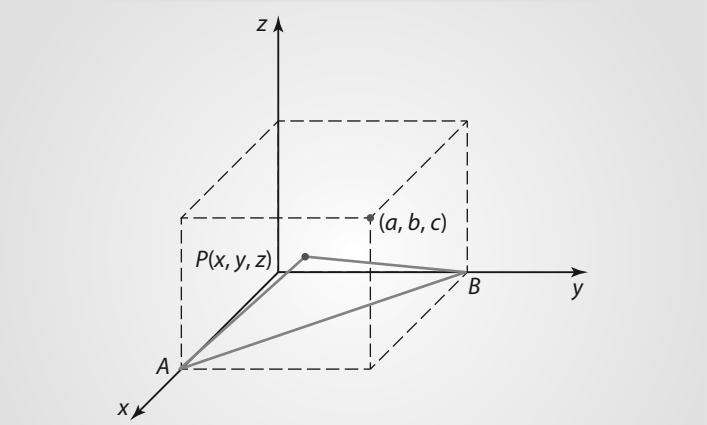


Figura 1.42

1.5 Hallar el área del triángulo determinado por los siguientes puntos dados:

$P_1(1, 1, 1)$ $P_2(1, 2, 1)$ $P_3(1, 1, 2)$

1.6 Calcular el área del triángulo determinada por los puntos:

$P_1(1, 2, 4)$ $P_2(1, -1, 3)$ $P_3(-1, -1, 2)$

1.7 En la figura 1.43 se muestra el vector $\vec{a}$ que se encuentra en el plano *xy* a 60° respecto de la horizontal, y el vector $\vec{b}$ que se halla sobre el eje *z* positivo; los módulos de los vectores son respectivamente,

$\|\vec{a}\| = 6.4$ $\|\vec{b}\| = 5$

a) Evaluar $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

b) Aplicar la regla de la mano derecha para hallar la dirección de $\vec{a} \times \vec{b}$.

c) Emplear b) para expresar $\vec{a} \times \vec{b}$ en términos de $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$.

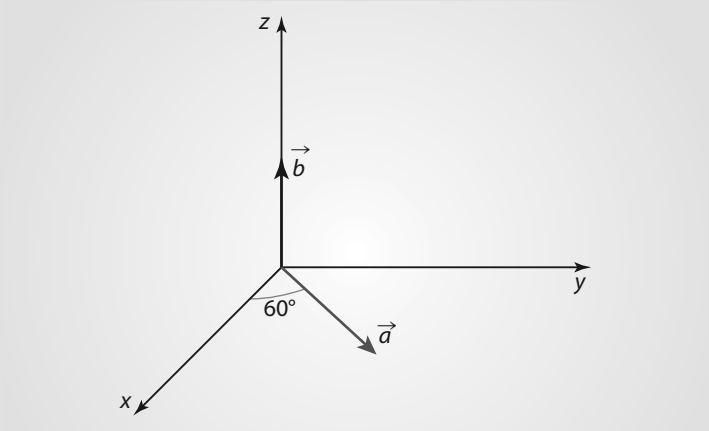


Figura 1.43

1.8 Hallar el volumen del paralelepípedo para el cual los vectores indicados son tres de sus aristas.

$$\vec{a} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} \qquad \vec{b} = -\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} \qquad \vec{c} = 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$$

1.9 Dados los puntos $O(0, 0, 0)$, $P(1, -1, 2)$, $Q(0, 3, -1)$ y $R(3, -4, 1)$, calcular el volumen del paralelepípedo que tiene lados adyacentes OP, OQ, OR.

1.10 Calcular la distancia, d, del punto $A(2, -6, 1)$ en la recta l que pasa por $B(3, 4, -2)$ y $C(7, -1, 5)$.

1.11 Encontrar una fórmula para determinar la distancia mínima entre l_1 y l_2 que se cruzan (oblicuas) (véase la figura 1.44).

Nota: Dos rectas se cruzan cuando no son paralelas y no se cortan.

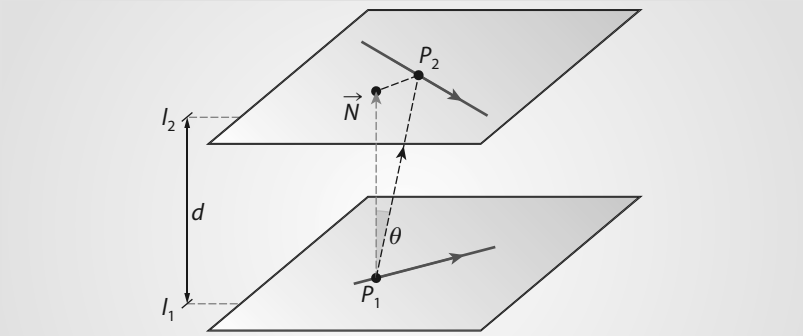


Figura 1.44

1.12 Demostrar que los planos $4x - 2y + 6z = 3$ y $-6x + 3y - 9z = 4$ son paralelos y que la distancia entre ellos es d (d mínima). Calcular d mínima.

1.13 La recta l tiene parametrización $x = 3t + 1$, $y = -2t + 4$, $z = t - 3$. Hallar una ecuación del plano que contenga a l y al punto $P(5, 0, 2)$.

1.14 Obtener las ecuaciones de la recta que pasa por $(3, 6, 4)$, corta al eje z y es paralela al plano $x - 3y + 5z - 6 = 0$

1.15 Determinar la ecuación del plano que contiene a $(2, 3, -5)$ y es paralelo a $x + y - 4z = 1$.

1.16 Hallar la ecuación del plano que contiene a (3, 6, 12) y es paralelo al plano *xy*.

1.17 Determinar la ecuación del plano que contenga a las rectas.

Recta I	**Recta II**
$x = 1 + 3t$	$x = 4 + 4s$
$y = 1 - t$	$y = 2s$
$z = 2 + t$	$z = 3 + s$

1.18 Determinar la ecuación del plano que contenga a las siguientes rectas paralelas:

Recta I	**Recta II**
$x = 1 + t$	$x = 3 + s$
$y = 1 + 2t$	$y = 2s$
$z = 3 + t$	$z = -2 + s$

1.19 Encontrar una ecuación del plano que contiene a (2, 4, 8) y es perpendicular a la recta $x = 10 - 3t, y = 5 + t, z = 6 - (1/2)t$.

1.20 Dados dos planos, $x + 3y - z - 9 = 0$ y $2x - 3y + 4z + 3 = 0$, obtener para la recta de intersección de ambos planos:

a) Un conjunto de ecuaciones simétricas.

b) Un conjunto de ecuaciones paramétricas.

c) Los cosenos directores de un vector, cuyas representaciones sean paralelas al mismo.

1.21 Si l_1 es la recta que pasa por $A(1, 2, 7)$ y $B(-2, 3, -4)$ y l_2 es la recta que pasa por $C(2, -1, 4)$ y $D(5, 7, -3)$, demostrar que l_1 y l_2 se cruzan y son oblicuas.

1.22 Hallar el punto de intersección del plano y la recta indicados.

$2x - 3y + 2z = -7$

$x = 1 + 2t$

$y = 2 - t$

$z = -3t$

1.23 Obtener ecuaciones particulares de la recta de intersección de los planos indicados.

$5x - 4y - 9z = 8$

$x + 4y + 3z = 4$

1.24 Encontrar ecuaciones paramétricas para la recta que es paralela a los planos dados y que pasa por el punto indicado.

$x + y - 4z = 2$

$2x - y + z = 10$

$P(5, 6, -12)$

1.25 Demostrar que la recta $\frac{1}{2}(x-3)=\frac{1}{3}(y+2)=\frac{1}{4}(z+1)$ está en el plano $x-2y+z=6$.

1.26 Calcular la distancia del punto $(-1, 3, 1)$ a la recta $x-2z=7, y=1$.

1.27 Determinar los valores de k para los cuales la intersección del plano $x+ky=1$ y el hiperboloide elíptico de dos hojas $y^2-x^2-z^2=1$ es:

a) una elipse.

b) una hipérbola.

Aplicaciones a la geometría

El siguiente conjunto de problemas resueltos muestra el potencial del uso de vectores en la prueba y análisis de demostraciones de teoremas conocidos de geometría plana por métodos vectoriales.

1.28 Demostrar que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

1.29 Demostrar que las medianas de un triángulo se cortan en un punto que divide a cada mediana en la razón 2:1.

1.30 Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se bisectan.

1.31 Demostrar que las alturas de un triángulo son concurrentes.

1.32 En el tetraedro $OABC$ que se muestra en la figura 1.45, la arista OA es perpendicular a la arista BC y la arista OB es perpendicular a CA. Mostrar que la arista OC es perpendicular a la arista AB.

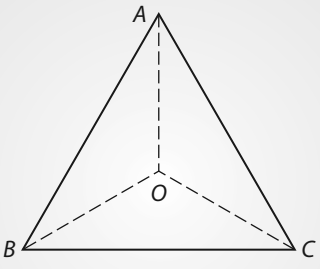


Figura 1.45

1.33 Sea $\angle ABC$ un ángulo inscrito en un semicírculo con centro en O y radio $OA = OB = r$ (véase figura 1.46). Demostrar que un ángulo inscrito en un semicírculo es recto.

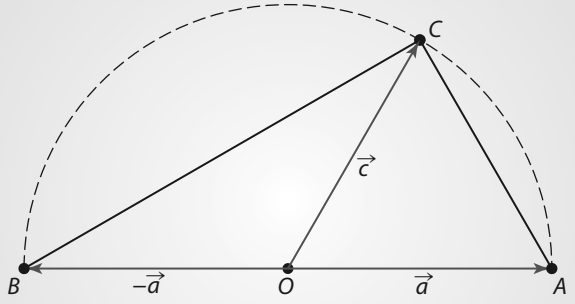


Figura 1.46

1.34 Demostrar el teorema de Apolonio, que establece que en un triángulo *ABC*, si *AD* es la mediana del lado *BC*, entonces:

$$\overrightarrow{AB}^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = 2\overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2$$

1.35 Mostrar que si dos círculos se intersectan, la recta que une sus centros biseca perpendicularmente al segmento que une sus puntos de intersección.

1.36 Si las diagonales de un paralelogramo son ortogonales, demostrar que el paralelogramo es un rombo.

1.37 Demostrar que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.

1.38 Demostrar que la recta que une un vértice de un paralelogramo con el punto medio del lado opuesto divide a la diagonal con una razón 2:1.

1.39 Demostrar que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante de los tres vértices.

Más problemas para resolver.

Capítulo

2 Funciones vectoriales



Competencias específicas a desarrollar

- Comprende el concepto de función vectorial.
- Grafica una función vectorial en dos y tres dimensiones.
- Usa el concepto de derivada en las funciones vectoriales.
- Define vectores tangente y normal unitarios.
- Comprende el concepto de curvatura de una función vectorial.
- Aplica las funciones vectoriales en la definición de aceleración de un objeto en movimiento curvilíneo.
- Define la aceleración tangencial y normal como función de los vectores tangente y normal unitarios.

2.1 Introducción

En la actualidad los cursos de cálculo se inician a partir de funciones de una variable, en las que el dominio es un conjunto de valores de la variable independiente, tales que puedan satisfacer la función dada, mientras que la imagen o contradominio constituye un conjunto de valores correspondientes de la variable dependiente. En esta sección se verá que existen funciones cuyo dominio es un conjunto de valores escalares y su imagen es un conjunto de vectores asociados.

Como se ve más adelante, es necesario definir esta nueva clase de funciones para comprender y cuantificar algunas propiedades físicas del movimiento de los cuerpos en dos y tres dimensiones, además de entender la importancia de este enfoque para distinguir con claridad las limitaciones de las metodologías que se aprendieron en cursos previos de cinemática, en donde los problemas de cuerpos en movimiento (en la mayoría de los casos) se trataron como movimientos en una dimensión (movimiento rectilíneo uniforme y uniformemente acelerado). Ahora no solo será posible analizar el movimiento en dos y tres dimensiones, sino que además se podrán cuantificar posiciones, velocidades, aceleraciones, curvaturas y algunas otras características de las trayectorias de un cuerpo en movimiento.

2.2 Funciones vectoriales y ecuaciones paramétricas (dos dimensiones)

Supóngase que se tiene un móvil que se desplaza en el espacio de dos dimensiones, tal que su posición en cualquier instante se define por las coordenadas (x, y), las cuales dependen de un parámetro t (tiempo) y que pueden escribirse como:

$$x = f(t)$$
$$y = g(t) \qquad \textbf{(2.1)}$$

Por tanto, como se puede observar, para todo número en el dominio común de f y g existe un vector $f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}}$ además de que los puntos extremos de las representaciones de posición de estos vectores describen una curva C que recorre el móvil. Lo anterior permite comprender que en una función cuyo dominio es un conjunto de números reales, su contradominio es un conjunto de vectores.

Definición 2.1

Sean f y g dos funciones escalares que dependen de la variable t. Entonces, para todo número t en el domino común a f y g existe un vector $\vec{R}$ definido por:

$$\vec{R}(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}} \qquad \textbf{(2.2)}$$

donde al vector $\vec{R}$ se le llama **función vectorial** o **función con valor vectorial**, y es una forma alternativa de representar una curva en el plano.

Definición 2.2

La ecuación (2.2) es una ecuación vectorial que define a una curva C; las componentes de esta función vectorial están dadas por

$$x = f(t)$$
$$y = g(t) \qquad \textbf{(2.3)}$$

Estas componentes reciben el nombre de **ecuaciones paramétricas** de C, y se trata del conjunto de todos los puntos (x, y) que satisfacen a las ecuaciones paramétricas, o bien la gráfica de la función vectorial $\vec{R}$.

La eliminación del parámetro en las ecuaciones (2.3) resulta en una ecuación (x, y), llamada **ecuación cartesiana**.

Ejemplo 2.1

Determinar el dominio en el que está definida la siguiente función vectorial:

$$\vec{R}(t) = \sqrt{t-2}\,\hat{\mathbf{i}} + (t-3)^{-1}\hat{\mathbf{j}}$$

Solución

Las ecuaciones paramétricas se pueden escribir de la siguiente manera:

$$f(t)=\sqrt{t-2}$$

$$g(t)=(t-3)^{-1}$$

El dominio de $\vec{R}$ es el conjunto de valores de t para los cuales $f(t)$ y $g(t)$ están definidos, pues $f(t)$ se define para $t \geq 2$ debido a que la raíz cuadrada solo acepta valores mayores o iguales a cero, y $g(t)$ se define para todos los números reales, excepto $t=3$.

Por tanto, el dominio de $\vec{R}$ es:

$$\{t \mid t \geq 2,\ t \neq 3\}$$

Ejemplo 2.2

Dada la ecuación vectorial $\vec{R}(t)=2\cos t\,\hat{\mathbf{i}}+2\operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{j}}$

a) Encontrar una ecuación cartesiana de la gráfica.

b) Trazar la gráfica de esta ecuación.

Solución

a) Las ecuaciones paramétricas de la gráfica son

$$x=2\cos t$$

$$y=2\operatorname{sen} t$$

Para eliminar el parámetro es posible elevar al cuadrado ambas ecuaciones y sumarlas, con lo que la ecuación cartesiana resultante es:

$$x^2+y^2=4$$

Esta ecuación representa una circunferencia de radio 2, con centro en el origen.

b)

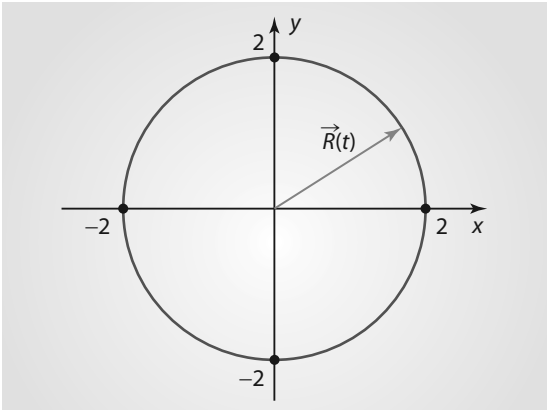


Figura 2.1

Actividad de aprendizaje

En equipo de dos o tres personas investiguen en diferentes fuentes de información alguna aplicación de las funciones vectoriales y de las ecuaciones paramétricas. Elaboren un video de no más de 5 minutos donde presenten su investigación. Sean creativos. Expongan en clase su trabajo.

Derivadas de las ecuaciones paramétricas

Primera y segunda derivadas de ecuaciones paramétricas

En la sección anterior se vio cómo encontrar una ecuación cartesiana a partir de un conjunto de ecuaciones paramétricas (eliminando el parámetro); por tanto, es natural pensar que las ecuaciones paramétricas puedan derivarse (de esta forma, la función vectorial tendrá su primera derivada, la cual será un vector).

De este modo, como se dijo antes, si se elimina el parámetro t de las ecuaciones paramétricas se obtiene una ecuación cartesiana, la cual define de forma implícita o explícita a y como una función de x; es decir, si las ecuaciones paramétricas son $x = f(t)$, $y = g(t)$, la ecuación cartesiana será de la forma:

$$y = h(x) \tag{2.4}$$

Si h es una función derivable de x y f, g son funciones derivables de t. Por lo anterior es posible utilizar la regla de la cadena como sigue:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \tag{2.5}$$

Si:

$$\frac{dx}{dt} \neq 0$$

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} \tag{2.6}$$

La ecuación (2.6) permite hallar la derivada de y con respecto a x a partir de las ecuaciones paramétricas.

De manera semejante, para la segunda derivada se puede escribir,

Como $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$, entonces:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(y')}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d(y')}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \tag{2.7}$$

Ejemplo 2.3

Dado el conjunto de ecuaciones paramétricas $x = 3t^2$, $y = 4t^3$, hallar la primera y segunda derivadas, sin eliminar el parámetro.

Solución

Usando las ecuaciones (2.6) y (2.7) se tiene lo siguiente.

Como:

$$\frac{dx}{dt} = 6t$$

$$\frac{dy}{dt} = 12t^2$$

entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{12t^2}{6t} = 2t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(y')}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{6t} = \frac{1}{3t}$$

Ejemplo 2.4

Dadas las ecuaciones paramétricas $x = 4 - t^2$, $y = t^2 + 4t$, obtener las ecuaciones de las rectas tangentes horizontal y vertical de la gráfica de estas ecuaciones.

Solución

De la ecuación (2.6) se puede notar que:

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}$$

La recta tangente es horizontal si la derivada es igual al cero, o bien el numerador de la ecuación anterior es cero. Esto es, si en un punto particular $\frac{dy}{dt} = 0$ y $\frac{dx}{dt} \neq 0$ entonces $\frac{dy}{dx} = 0$ y la gráfica del par de ecuaciones paramétricas tiene una **recta tangente horizontal** en el punto dado.

Ahora, si $\frac{dx}{dt} = 0$ y $\frac{dy}{dt} \neq 0$ entonces $\frac{dy}{dx}$ no existe en el punto y la gráfica puede tener una **recta tangente vertical** en ese punto.

Regresando a las ecuaciones paramétricas, las derivadas pueden escribirse como:

$$\frac{dx}{dt} = -2t \qquad \frac{dy}{dt} = 2t + 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t + 4}{-2t}$$

Por tanto, las rectas horizontales y verticales son:

Tangente horizontal si

$$\frac{dy}{dx}=0 \qquad \Rightarrow \qquad 2t+4=0$$

$$\text{o bien:} \qquad t=-2$$

donde:

$$x=0$$

$$y=-4$$

Tangente vertical si

$$\frac{dx}{dt}=0 \qquad \Rightarrow \qquad t=0$$

donde:

$$x=4$$

$$y=0$$

2.3 Cálculo diferencial de funciones vectoriales (dos dimensiones)

En los cursos de cálculo de una variable se define la derivada de funciones escalares dependiendo su continuidad. Sin embargo, ahora las funciones no son escalares, pero sus componentes en las direcciones x y y sí lo son; por tanto, es posible extender las definiciones usadas en el cálculo de una variable para encontrar las derivadas de funciones vectoriales.

Definición 2.3

Considérese $\vec{R}$ como una función vectorial de la forma:

$$\vec{R}(t)=f(t)\hat{\mathbf{i}}+g(t)\hat{\mathbf{j}}$$

Entonces el límite de $\vec{R}(t)$ cuando t se aproxima a t_1 se define de la siguiente manera:

Si $\lim_{t\to t_1} f(t)$ y $\lim_{t\to t_1} g(t)$ existen:

$$\lim_{t\to t_1}\vec{R}(t)=\left[\lim_{t\to t_1} f(t)\right]\hat{\mathbf{i}}+\left[\lim_{t\to t_1} g(t)\right]\hat{\mathbf{j}} \qquad (2.8)$$

Ejemplo 2.5

Si

$$\vec{R}(t)=\cos t\,\hat{\mathbf{i}}+2e^{t}\hat{\mathbf{j}}$$

entonces:

$$\lim_{t\to 0}\vec{R}(t)=\left[\lim_{t\to 0}\cos t\right]\hat{\mathbf{i}}+\lim_{t\to 0}2e^{t}\hat{\mathbf{j}}$$
$$=\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}$$

Definición 2.4

Una función vectorial $\vec{R}(t)$ es **continua** en t_1 si y solo si se cumplen las condiciones siguientes:

a) $\vec{R}(t_1)$ existe

b) $\lim_{t\to t_1}\vec{R}(t)$ existe **(2.9)**

c) $\lim_{t\to t_1}\vec{R}(t)=\vec{R}(t_1)$

A partir de las definiciones anteriores se puede concluir que si $f(t)$ y $g(t)$ son continuas en $t=t_1$, entonces $\vec{R}(t)$ es continua.

Derivada de una función vectorial

Si $\vec{R}(t)$ es una función vectorial, entonces la derivada de $\vec{R}$ es otra función vectorial, la cual puede ser representada por $\vec{R}'(t)$ y definida por:

$$\vec{R}'(t)=\lim_{t\to 0}\frac{\vec{R}(t+\Delta t)-\vec{R}(t)}{\Delta t} \qquad \textbf{(2.10)}$$

Si este límite existe, entonces la ecuación (2.10) se cumple.

Teorema 2.1

Si $\vec{R}(t)$ es una función vectorial definida por:

$$\vec{R}(t)=f(t)\hat{\mathbf{i}}+g(t)\hat{\mathbf{j}}$$

entonces,

$$\vec{R}'(t)=f'(t)\hat{\mathbf{i}}+g'(t)\hat{\mathbf{j}}$$

Demostración

De la definición (2.10) se puede escribir:

$$\vec{R}'(t)=\lim_{t\to 0}\frac{\vec{R}(t+\Delta t)-\vec{R}(t)}{\Delta t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left[f(t+\Delta t)-f(t)\right]\hat{\mathbf{i}}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[g(t+\Delta t)-g(t)\right]\hat{\mathbf{j}}}{\Delta t}$$
$$=f'(t)\hat{\mathbf{i}}+g'(t)\hat{\mathbf{j}}$$

Es muy importante notar que el vector derivada tiene una dirección tangente a la curva dada en el punto en donde se calcula la derivada, lo que permite establecer que si para una función escalar la derivada

representa la pendiente de una recta tangente a un punto dado, la derivada de una función vectorial constituye un vector tangente a la curva dada en el punto definido. De esta forma es posible demostrar que la velocidad de un cuerpo siempre es tangente a la trayectoria que describe (véase figura 2.2).

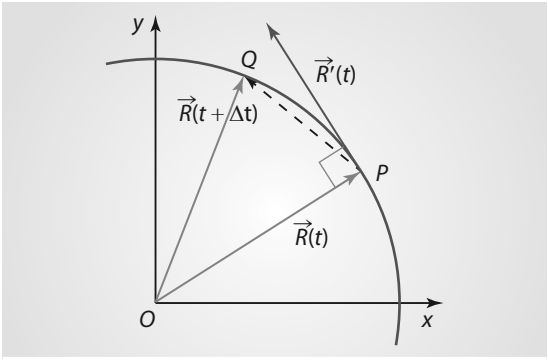


Figura 2.2

Las derivadas de orden superior de las funciones vectoriales se definen con relación a las derivadas de orden superior de las funciones escalares, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\vec{R}(t) &= f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}} \\ \vec{R}'(t) &= f'(t)\hat{\mathbf{i}} + g'(t)\hat{\mathbf{j}} \\ \vec{R}''(t) &= f''(t)\hat{\mathbf{i}} + g''(t)\hat{\mathbf{j}}\end{aligned} \qquad \textbf{(2.11)}$$

Fórmulas de derivación

En esta sección se transcribe un conjunto de fórmulas de derivación para funciones vectoriales; es importante tenerlas en cuenta al derivar sumas, productos escalares y vectoriales de funciones vectoriales.

Sean $\vec{A}$ $\vec{B}$ y $\vec{C}$ funciones vectoriales derivadas de un escalar u y ϕ una función escalar de u. Entonces,

1) $\dfrac{d}{du}(\vec{A}+\vec{B}) = \dfrac{d\vec{A}}{du} + \dfrac{d\vec{B}}{du}$

2) $\dfrac{d}{du}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \dfrac{d\vec{A}}{du}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\dfrac{d\vec{B}}{du}$

3) $\dfrac{d}{du}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\dfrac{d\vec{B}}{du} + \dfrac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B}$

4) $\dfrac{d}{du}(\phi\vec{A}) = \phi\dfrac{d\vec{A}}{d\vec{u}} + \dfrac{d\phi}{du}\vec{A}$

5) $\dfrac{d}{du}(\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}\times\dfrac{d\vec{C}}{du} + \vec{A}\times\dfrac{d\vec{B}}{du}\times\vec{C} + \dfrac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B}\times\vec{C}$

6) $\dfrac{d}{du}\left(\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right) = \vec{A}\times\left(\vec{B}\times\dfrac{d\vec{C}}{du}\right) + \vec{A}\times\left(\dfrac{d\vec{B}}{du}\times\vec{C}\right) + \dfrac{d\vec{A}}{du}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$

Es importante destacar que las demostraciones de cada una de las fórmulas anteriores provienen de la definición de derivada de un vector, de la regla de la cadena y de productos punto y cruz. Éstas resultan sencillas si se tienen en cuenta estos conceptos.

Teorema 2.2

Si $\vec{R}$ es una función vectorial diferenciable en un intervalo y $\|\vec{R}(t)\|$ es constante para toda t en el intervalo, entonces los vectores $\vec{R}(t)$ y $D_t\vec{R}(t)=\vec{R}(t)$ son **ortogonales**.

Demostración

Sea $\|\vec{R}(t)\|=k$.

Entonces,

$$\vec{R}(t)\cdot\vec{R}(t)=k^2$$

Diferenciando respecto a t se tiene:

$$\vec{R}'(t)\cdot\vec{R}(t)+\vec{R}(t)\cdot\vec{R}'(t)=0$$

$$2\vec{R}(t)\cdot\vec{R}'(t)=0$$

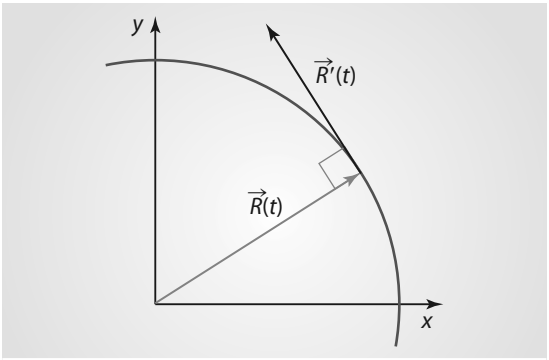


Figura 2.3

Vectores tangente y normal unitarios

Los vectores tangente y normal unitarios son usados ampliamente en los cursos de dinámica, en los que es de gran importancia la caracterización de los vectores velocidad y aceleración de partículas que se mueven a lo largo de trayectorias curvilíneas, ya que el manejo vectorial de estas cantidades físicas resulta ser más simple y elegante. Dada su importancia, a continuación se definen estos vectores unitarios y se exponen sus principales características.

Definición 2.5

Si $\vec{R}(t)$ es el vector de posición de la curva C en P sobre C, entonces el vector tangente unitario de C en P, representado por $\vec{T}(t)$ es el vector unitario en dirección de $D_t\vec{R}(t)$ si $D_t\vec{R}(t)\neq 0$.

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{R}'(t)}{\|\vec{R}'(t)\|} \qquad \textbf{(2.12)}$$

Nota: Como $\vec{T}(t)$ es unitario para cualquier t, se concluye que $D_t\vec{T}(t)$ debe ser ortogonal a $\vec{T}(t)$.

Definición 2.6

Si $\vec{T}(t)$ es el vector tangente unitario de C en un punto P, entonces el vector normal unitario, representado por $\vec{N}(t)$ es el vector unitario en la dirección de $\vec{T}'(t)$:

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{\left\|\vec{T}'(t)\right\|} \qquad \textbf{(2.13)}$$

Como se recordará, la aceleración de una partícula se puede obtener de la segunda derivada del vector de posición; por tanto, si una partícula se mueve a lo largo de una curva C, entonces es posible identificar las componentes tangenciales y normales de la aceleración mediante algunas transformaciones, como se ve a continuación.

De (2.12) se tiene:

$$\vec{R}'(t)=\left\|\vec{R}'(t)\right\|\vec{T}(t) \qquad \textbf{(2.14)}$$

Derivando a (2.14) con respecto al tiempo:

$$\vec{R}''(t)=D_t\left\|\vec{R}'(t)\right\|\vec{T}(t)+\left\|\vec{R}'(t)\right\|\vec{T}'(t) \qquad \textbf{(2.15)}$$

De (2.13) se tiene:

$$\vec{T}'(t)=\vec{N}(t)\left\|\vec{T}'(t)\right\|$$

Sustituyendo en (2.15) se puede escribir:

$$\vec{R}''(t)=\underbrace{\left(D_t\left\|\vec{R}'(t)\right\|\right)}_{\text{componente tangencial}}\vec{T}(t)+\underbrace{\left(\left\|\vec{R}'(t)\right\|\left\|\vec{T}'(t)\right\|\right)}_{\text{componente normal}}\vec{N}(t) \qquad \textbf{(2.16)}$$

La ecuación (2.16) muestra de manera clara las componentes normales y tangenciales de la aceleración. Asimismo, en la figura 2.4 se aprecia la ubicación de tales componentes sobre una trayectoria dada.

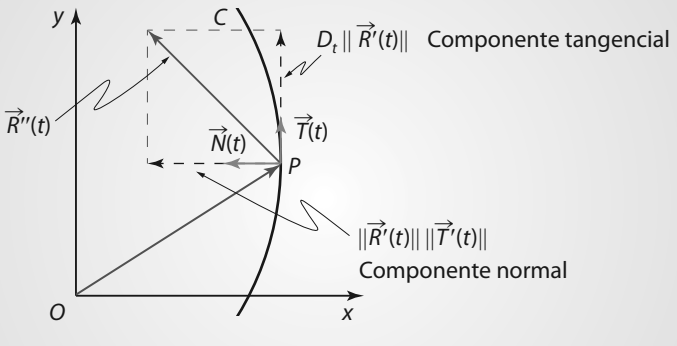


Figura 2.4

Actividad de aprendizaje

En equipo elaboren un díptico donde presenten y expliquen los Teoremas 2.1 y 2.2. Realicen una exposición en clase con los dípticos del grupo.

2.4 Curvatura

Otro concepto muy importante no solo en matemáticas sino también en los cursos de mecánica es la curvatura de una función. Conocer el grado de curvatura permite cuantificar la fuerza normal (fuerza centrípeta) que experimenta un cuerpo que se mueve a velocidad constante o variable a lo largo de una trayectoria curvilínea.

Definición 2.7

La **curvatura** puede definirse como la intensidad de cambio de la dirección de una curva con respecto a una variación en su longitud.

En la figura 2.5 se muestra una curva con su correspondiente vector tangente unitario y su dirección ϕ (medido en radianes), donde la curvatura se puede entender como la variación de este ángulo con respecto a la longitud de la trayectoria, esto es:

$$K(t)=\left|\frac{d\phi}{dS}\right| \qquad \textbf{(2.17)}$$

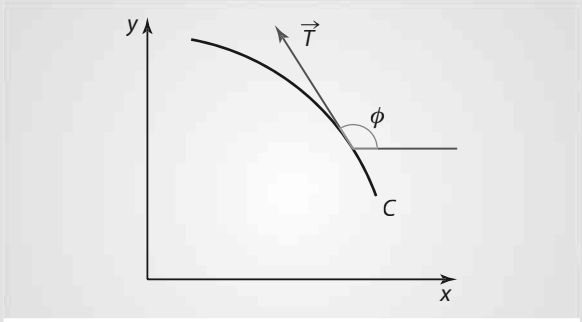


Figura 2.5

Puesto que $\|\vec{T}(t)\|=1$ entonces es posible escribir:

$$\begin{aligned} \vec{T}(t)&=\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}}+\operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{j}} \\ D_\phi\vec{T}(t)&=-\operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{i}}+\cos\phi\,\hat{\mathbf{j}} \\ \left\|D_\phi\vec{T}(t)\right\|&=1 \end{aligned} \qquad \textbf{(2.18)}$$

Para comprender la definición de curvatura, considérese el vector $D_S\vec{T}(t)$ donde S unidades es la longitud de arco medida desde un punto elegido arbitrariamente en C hasta un punto P, y S crece cuando t crece.

Por la regla de la cadena,

$$D_S\vec{T}(t)=D_\phi\vec{T}(t)\frac{d\phi}{dS}$$
$$\left\|D_S\vec{T}(t)\right\|=\left\|D_\phi\vec{T}(t)\frac{d\phi}{dS}\right\| \qquad \textbf{(2.19)}$$

Pero como:

$$\left\|D_\phi\vec{T}(t)\right\|=1$$
$$\left\|D_S\vec{T}(t)\right\|=\left|\frac{d\phi}{dS}\right| \qquad \textbf{(2.20)}$$

El número $|D_S\phi|$ es el valor absoluto de la rapidez de cambio del ángulo que le da dirección a una curva respecto a su longitud; este número se llama **curvatura de la curva en el punto**.

Definición 2.8

Si $\vec{T}(t)$ es el vector unitario tangente a una curva C en P, S es la longitud de arco desde un punto escogido arbitrariamente en C, hasta P y S aumenta cuando t se incrementa, entonces el vector curvatura de C en P, representado por $\vec{K}(t)$ está dado por:

$$\vec{K}(t)=D_S\vec{T}(t) \qquad \textbf{(2.21)}$$

La curvatura de C en P, designada por $K(t)$ es la magnitud del vector curvatura:

$$K(t)=\left\|D_S\vec{T}(t)\right\| \qquad \textbf{(2.22)}$$

donde, como $\left\|D_\phi\vec{T}(t)\right\|=1$

$$K(t)=\left|\frac{d\phi}{dS}\right|$$

Para encontrar el vector curvatura y la curvatura de una curva particular, conviene tener una fórmula que exprese el vector curvatura en términos de derivadas con respecto a t.

Así, por la regla de la cadena,

$$D_t\vec{T}(t)=D_S\vec{T}(t)\frac{dS}{dt} \qquad \textbf{(2.23)}$$

Recordar que, de la definición de longitud de arco:

$$\frac{dS}{dt}=\left\|D_t\vec{R}(t)\right\|$$

Sustituyendo en (2.23),

$$D_t\vec{T}(t)=D_S\vec{T}(t)\left\|D_t\vec{R}(t)\right\|$$

$$D_S\vec{T}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{\left\|\vec{R}'(t)\right\|} \qquad \textbf{(2.24)}$$

$$\vec{K}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{\left\|\vec{R}'(t)\right\|}$$

La magnitud del vector curvatura puede encontrarse de la siguiente manera:

$$\left\|\vec{K}(t)\right\|=\left\|\frac{\vec{T}'(t)}{\left\|\vec{R}'(t)\right\|}\right\| \qquad \text{Magnitud de la curvatura} \qquad \textbf{(2.25)}$$

Definición 2.9

Si $\vec{K}(t)$ es la curvatura de C en P y $K(t)\neq 0$, entonces el radio de cuadratura de C en P, denotado por $\rho(t)$, está dado por:

$$\rho(t)=\frac{1}{k(t)} \qquad \textbf{(2.26)}$$

Funciones vectoriales y ecuaciones paramétricas (tres dimensiones)

Hasta ahora se han considerado curvas planas y representadas por funciones vectoriales $\vec{R}(t)$ (vector de posición). Como se recordará, se encontró su dominio, gráfica, derivaciones, así como conceptos importantes aplicados a estas curvas, tales como vectores tangentes unitarios, normales unitarios, vector curvatura y radio de una curvatura. A partir de esta sección se tratarán los mismos conceptos, pero extendiéndolos a curvas tridimensionales.

Así, sea $\vec{r}(t)=f(t)\hat{\mathbf{i}}+g(t)\hat{\mathbf{j}}+h(t)\hat{\mathbf{k}}$ una función vectorial donde $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ son funciones escalares continuas. La figura 2.6 ilustra una representación general de la función vectorial en tres dimensiones.

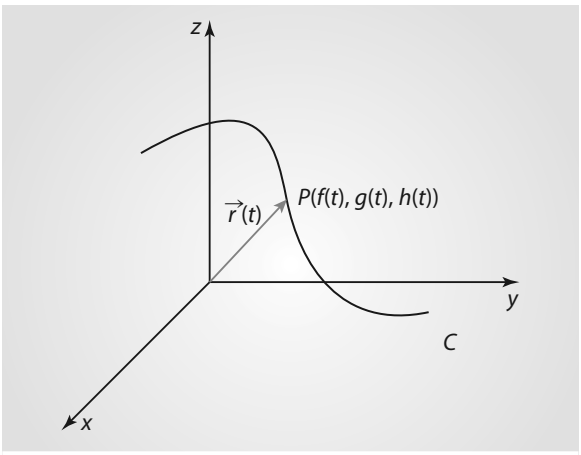


Figura 2.6

donde:

$$f(t) = x$$
$$g(t) = y \qquad \textbf{(2.27)}$$
$$h(t) = z$$

Éstas son las ecuaciones paramétricas de $\vec{r}(t)$ tal como se hizo en las curvas planas.

Ejemplo 2.6

Sea $\vec{r}(t) = t\hat{\mathbf{i}} + t^2\hat{\mathbf{j}} + t^3\hat{\mathbf{k}}$ para $t \geq 0$. Trazar la gráfica de C.

Solución

Las ecuaciones paramétricas pueden escribirse así:

$$x = t \qquad \textbf{(1)}$$
$$y = t^2 \qquad \textbf{(2)}$$
$$z = t^3 \qquad \textbf{(3)}$$

Eliminando el parámetro en las primeras dos ecuaciones se tiene:

$$y = x^2 \qquad \textbf{(4)}$$

Esto implica que todo punto $P(x, y, z)$ en C también está en el cilindro parabólico $y = x^2$.

Si se elimina el parámetro en (1) y (3) se obtiene:

$$z = x^3 \qquad \textbf{(5)}$$

el cual es otro cilindro en el plano xz.

En este caso, la curva C es la intersección de las dos superficies, ya que para todo punto P, C está en ambos cilindros (véase figura 2.7).

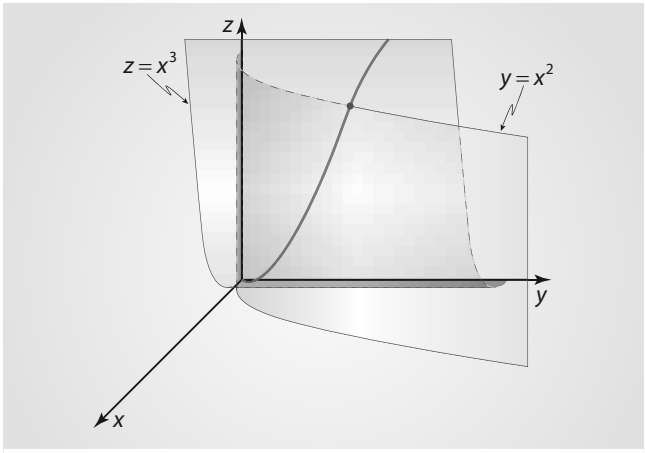


Figura 2.7

Ejemplo 2.7

Sea $r(t)=a\cos t\,\hat{\mathbf{i}}+a\,\text{sen}\,t\,\hat{\mathbf{j}}+bt\,\hat{\mathbf{k}}$ para $t\geq 0$, donde a y b son positivos. Trazar la gráfica de C.

Solución

En este caso, las ecuaciones perimétricas son:

$$x=a\cos t \qquad \textbf{(1)}$$

$$y=a\,\text{sen}\,t \qquad \textbf{(2)}$$

$$z=bt \qquad \textbf{(3)}$$

De (1) y (2) se puede eliminar el parámetro, elevando al cuadrado y sumando, para obtener:

$$x^2+y^2=a^2 \qquad \textbf{(4)}$$

Por tanto, cualquier punto (x, y, z) está en el cilindro circular, si t varía de 0 a 2π y el punto P parte de $(0, 0, 0)$ y se mueve hacia arriba, dando una vuelta sobre el cilindro. Entonces, para obtener una curva aproximada, se puede realizar una tabulación para determinados valores del parámetro t como se muestra a continuación.

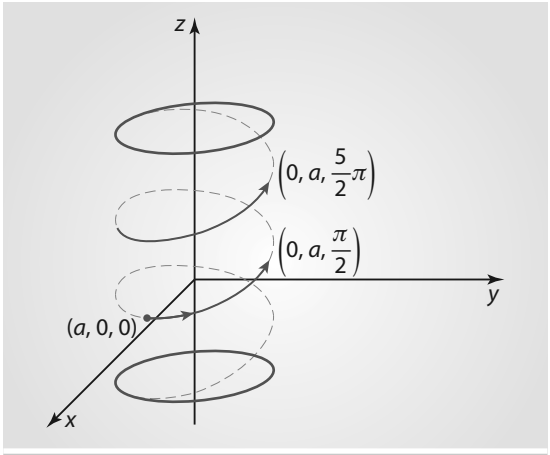


Figura 2.8

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
x	2	0	−2	0	2	0
y	0	2	0	−2	0	2
z	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$

Ejemplo 2.8

Sea $\vec{r}(t)=(2t+1)\hat{\mathbf{i}}+(3t-4)\hat{\mathbf{j}}-5t\hat{\mathbf{k}}$. Describir la curva C.

Solución

Las ecuaciones paramétricas aquí son:

$$\left.\begin{aligned} x&=2t+1\\ y&=3t-4\\ z&=-5t \end{aligned}\right\}\ \text{Recta en el espacio}$$

Al eliminar el parámetro se obtiene:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z}{-5}$$

Nótese que se han obtenido las ecuaciones simétricas de una recta en el espacio.

Ejemplo 2.9

Trazar a gráfica de $\vec{r}(t)=2\cos t\,\hat{\mathbf{i}}+2\operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}$.

Solución

En este caso, las ecuaciones paramétricas son:

$$\left.\begin{aligned} x&=2\cos t\\ y&=2\operatorname{sen} t\\ z&=3\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2=4 \qquad \text{Cilindro circular de radio 2.}$$

Pero dado que $z = 3 = constante$ en cualquier t, la gráfica es un círculo con radio 2, es decir una traza del cilindro (véase figura 2.9).

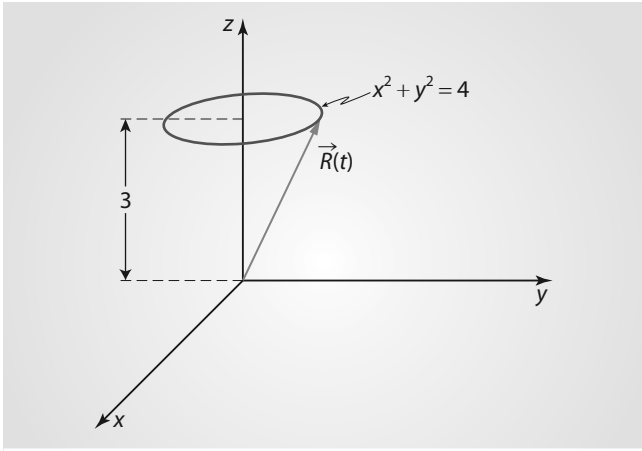


Figura 2.9

Ejemplo 2.10

Obtener una función vectorial que describa la curva C de intersección del plano $y = 2x$ y el paraboloide $z=9-x^2-y^2$.

Solución

Si se hace $x = t$, entonces se puede escribir:

$$y = 2t$$

$$z = 9 - t^2 - 4t^2 = 9 - 5t^2$$

$$\therefore \vec{r}(t) = t\hat{\mathbf{i}} + 2t\hat{\mathbf{j}} + (9 - 5t^2)\hat{\mathbf{k}}$$

En la figura 2.10 se puede apreciar la intersección del plano y el paraboloide, que es la función vectorial.

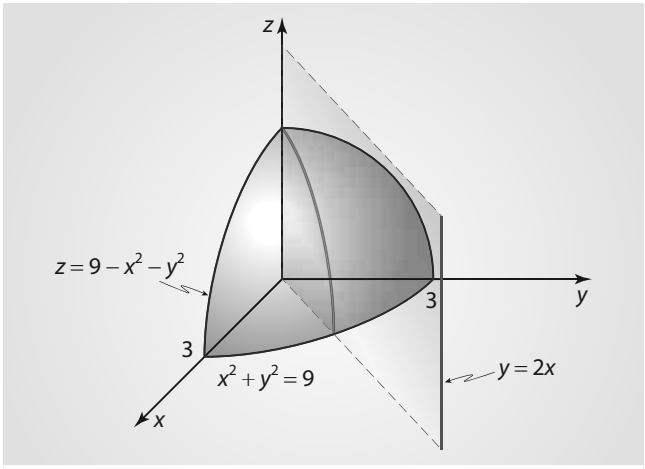


Figura 2.10

Longitud de arco

Curvas de dos dimensiones

Supóngase que la curva C tiene las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ $y = g(t)$ y que f' y g' son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces la longitud de arco L de C, desde el punto P_1 $(f(a), g(a))$ hasta P_2 $(f(b), g(b))$, está dado por:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left[f'(t)\right]^2 + \left[g'(t)\right]^2}\, dt \qquad \textbf{(2.28)}$$

Curvas en tres dimensiones

De manera análoga, para una curva en tres dimensiones cuyas ecuaciones paramétricas son $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, la longitud de arco, desde $P_1 = (f(a), g(a), h(a))$ hasta $P_2 = (f(b), g(b), h(b))$ está dado por:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left[f'(t)\right]^2 + \left[g'(t)\right]^2 + \left[h'(t)\right]^2}\, dt \qquad \textbf{(2.29)}$$

Actividad de aprendizaje

En el siguiente espacio realiza un mapa conceptual del tema de curvatura.

2.5 Cálculo diferencial de funciones vectoriales (3 dimensiones)

Las definiciones de límites, continuidad y derivada son iguales para vectores en tres dimensiones, tal como se definieron antes para la curva en el plano, solo que se extienden a la nueva componente z.

Teorema 2.3

Si $\vec{R}(t)$ es una función vectorial definida por:

$$\vec{R}(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}} + h(t)\hat{\mathbf{k}}$$

y $\vec{R}'(t)$ existe $\Rightarrow$, entonces,

$$\vec{R}'(t) = f'_g(t)\hat{\mathbf{i}} + g'(t)\hat{\mathbf{j}} + h'(t)\hat{\mathbf{k}} \qquad \textbf{(2.30)}$$

La **interpretación geométrica** de derivada es la misma que para curvas en el plano. Esto se aprecia con mayor claridad en la figura 2.11.

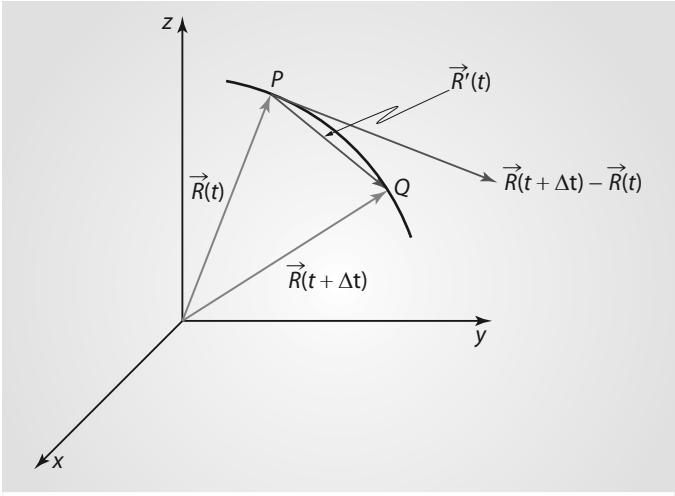


Figura 2.11

Para tres dimensiones, la definición de vector tangente unitario es semejante que la dada para dos dimensiones, ya que las derivadas son análogas y tienen la misma interpretación geométrica.

Por tanto, de igual modo se define como:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{R}'(t)}{\left\|\vec{R}'(t)\right\|} \qquad \textbf{(2.31)}$$

De igual manera, las definiciones de vector normal unitario y de curvatura son las mismas:

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'(t)}{\left\|\vec{T}'(t)\right\|} \qquad \textbf{(2.32)}$$

$$\vec{K}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\left\|\vec{R}'(t)\right\|} \qquad \textbf{(2.33)}$$

Vector binormal unitario

Un tercer vector, definido mediante $\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$ recibe el nombre de **vector binormal**.

Los tres vectores unitarios $\vec{B}$, $\vec{T}$, $\vec{N}$ forman un conjunto de vectores mutuamente ortogonales de orientación derecha llamado **triedro móvil** (véase figura 2.12), donde:

El plano de $\vec{T}$ y $\vec{N}$ se llama **plano osculador**.

El plano de $\vec{N}$ y $\vec{B}$ se llama **plano normal**.

El plano de $\vec{T}$ y $\vec{B}$ se llama **plano rectificador**.

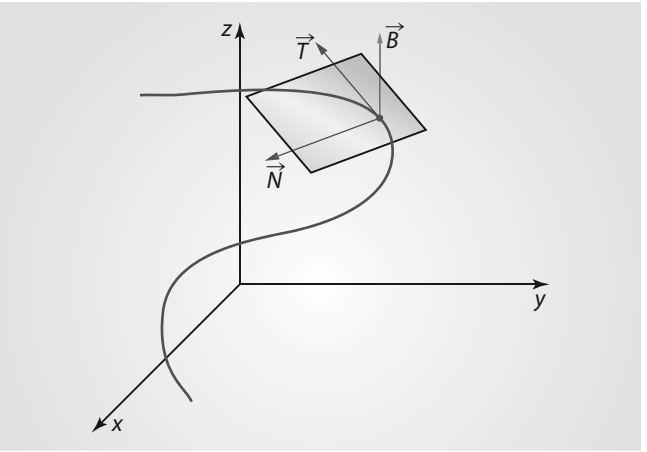


Figura 2.12

Nota: Literalmente, osculador significa besador.

Actividad de aprendizaje

Investiga en diferentes fuentes de información sobre las aplicaciones del vector binomial y de los planos osculador, normal y rectificador.

Problemas para resolver

Resuelve con detalle cada uno de los siguientes problemas. Las soluciones las puedes verificar al final del texto.

2.1 Trazar la gráfica de la ecuación vectorial y obtener una ecuación cartesiana.

$$\vec{R}(t)=t^2\hat{\mathbf{i}}+(t+1)\hat{\mathbf{j}}$$

2.2 Trazar la gráfica de la ecuación vectorial y obtener una ecuación cartesiana.

$$\vec{R}(t)=\sec t\,\hat{\mathbf{i}}+\tan t\,\hat{\mathbf{j}} \text{ en } \left[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi\right]$$

2.3 Obtener una ecuación de la recta tangente a la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x=2\operatorname{sen} t, y=5\cos t$ en el punto donde $t=\frac{1}{3}\pi$.

2.4 Para las ecuaciones paramétricas dadas obtener las ecuaciones de las rectar tangentes horizontales calculando los valores de t para los cuales $\frac{dy}{dt}=0$ y hallar las ecuaciones de las rectas tangentes verticales encontrando los valores de t para los cuales $\frac{dx}{dt}=0$.

$$x=4t^2-4t$$
$$y=1-4t^2$$

2.5 Mostrar de manera gráfica la diferencia entre los conjuntos indicados de ecuaciones paramétricas:

$x=a\cos t$ $\quad y=a\operatorname{sen} t$ $\quad a>0$ $\quad 0\le t\le\pi$ **(1)**

$x=a\operatorname{sen} t$ $\quad y=a\cos t$ $\quad a>0$ $\quad 0\le t\le\pi$ **(2)**

2.6 Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la curva dada en el valor del punto dado.

$$x=t^2+t \quad \textbf{(1)}$$
$$y=t^2 \quad \textbf{(2)}$$

en el punto $P(2, 4)$.

2.7 Determinar el vector tangente unitario $\vec{T}(t)$ para la curva $R(t)=e^t\hat{\mathbf{i}}+e^{-t}\hat{\mathbf{j}}$.

2.8 Determinar el vector tangente unitario $\vec{T}(t)$ y el vector normal unitario $\vec{N}(t)$ de la siguiente función vectorial:

$$\vec{R}(t)=3\cos t\,\hat{\mathbf{i}}+3\operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{j}}$$

2.9 Determinar $\vec{T}(t)$ y $\vec{N}(t)$ para las curvas cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x=\cos kt \qquad y=\operatorname{sen} kt$$

2.10 Determinar los vectores tangente y normal unitarios para la función vectorial.

$$\vec{R}(t)=\ln\cos t\,\hat{\mathbf{i}}+\ln \operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{j}}$$

2.11 Determinar la curvatura y el radio de curvatura de la función $x=\operatorname{sen} y$ en el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{6}\pi\right)$.

2.12 Determinar la curvatura y el radio de curvatura en el punto dado para la función vectorial $\vec{R}(t)=t^2\hat{\mathbf{i}}+(2t+1)\hat{\mathbf{j}}$.

2.13 Hallar el módulo del vector curvatura K y el radio de curvatura correspondiente para la curva dada en las ecuaciones paramétricas $x=\dfrac{1}{1+t}$ y $y=\dfrac{1}{1-t}$ en $t=0$.

2.14 Determinar la curvatura y el radio de curvatura de la función $y=x^4-x^2$.

2.15 El centro de la circunferencia de curvatura C en un punto P se llama centro de curvatura en P. Demostrar que las coordenadas del centro de curvatura de una circunferencia en $P(x, y)$ están dadas por

$$X_C=x-\frac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},\quad Y_C=y+\frac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+1}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$$

2.16 Trazar la gráfica correspondiente a la función vectorial $\vec{V}(t)=2\operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{i}}+4\cos t\,\hat{\mathbf{j}}+t\hat{\mathbf{k}}$ para $t\geq 0$.

2.17 Trazar la gráfica correspondiente a la función vectorial $\vec{r}(t)=t\hat{\mathbf{i}}+2t\hat{\mathbf{j}}+\cos t\hat{\mathbf{k}}$, $t\geq 0$.

2.18 Trazar la gráfica de la curva C determinada por $\vec{r}(t)=(t^2+1)\hat{\mathbf{i}}+t\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}$.

2.19 Determinar el vector tangente unitario a la función vectorial $\vec{r}(t)=(t\cos t-\operatorname{sen} t)\hat{\mathbf{i}}+(t\operatorname{sen} t+\cos t)\hat{\mathbf{j}}+2t\hat{\mathbf{k}}$, $t>0$.

2.20 Para la hélice circular $\vec{r}(t)=a\cos t\,\hat{\mathbf{i}}+a\operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{j}}+ct\hat{\mathbf{k}}\Rightarrow$ hélice circular encontrar:

a) el vector tangente unitario $\vec{T}$.

b) el vector normal unitario $\vec{N}$.

c) la magnitud de la curvatura K.

2.21 Obtener una ecuación del plano *osculador* de la curva en espacio dada en el punto t indicado.

La hélice circular $\vec{r}(t)=2\cos t\,\hat{\mathbf{i}}+2\operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{j}}+3t\hat{\mathbf{k}}$ en $t=\dfrac{\pi}{4}$.

Sugerencia: Véase el problema anterior 2.20.

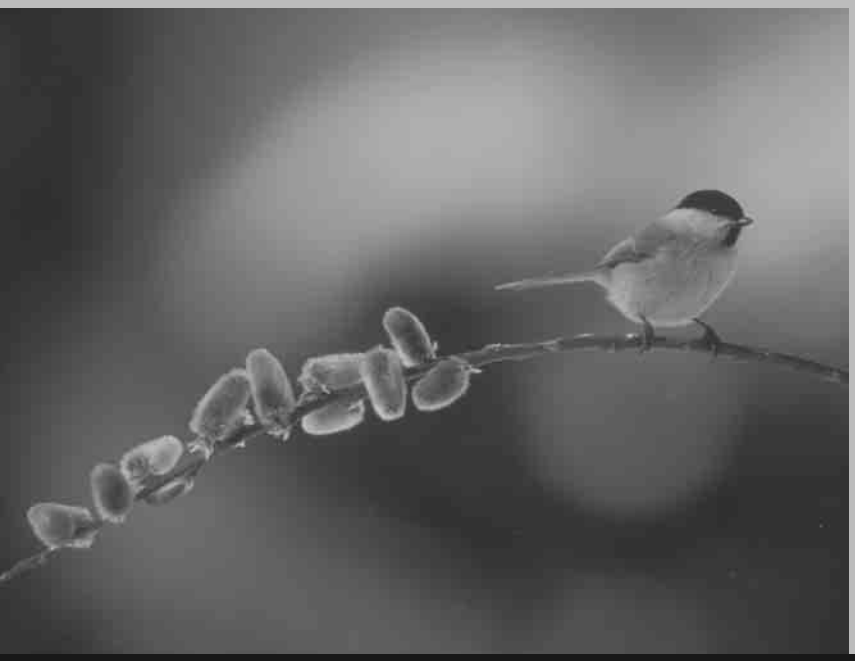


Más problemas para resolver.

Capítulo

3

Funciones de varias variables



Competencias específicas a desarrollar

- Utiliza la idea intuitiva de función para generalizarla a funciones de varias variables.
- Comprende y calcula límites de funciones de varias variables.
- Define la derivada parcial y comprende sus diversas aplicaciones.
- Define el vector gradiente y lo relaciona en el cálculo de la derivada direccional de una función de varias variables.
- Determina la ecuación de un plano tangente a una superficie determinada.

3.1 Introducción

Día a día, en las actividades comunes de la vida cotidiana es posible darse cuenta que muchas cantidades no son absolutas; es decir, que éstas dependen de otros factores para cambiar su valor o condición. En los cursos de cálculo de una variable se tratan reglas de correspondencia, las cuales dependen de una sola variable para cambiar su valor; de estos cursos se puede recordar que a estas reglas de correspondencia se les define como funciones. Sin embargo, como se señaló en capítulos previos, existen cantidades que para cambiar es necesario que dos o más variables cambien, por lo que a estas nuevas reglas de correspondencia se les llama **funciones de varias variables**. A continuación se da una definición de éstas y su interpretación gráfica.

Definición 3.1

Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales. Una función f de dos variables es una regla de correspondencia que asocia a cada par (x, y) en el plano bidimensional un único número real, que se denota por $f(x, y)$. El conjunto D es el dominio de f, y la imagen de la función se representa por puntos en una recta real.

Una función de dos variables se denota como:

$$z = f(x, y) \qquad \textbf{(3.1)}$$

En la figura 3.1 se aprecia una función de dos variables en forma genérica; en ésta se puede ver que el dominio consiste en los pares ordenados (x, y) que se encuentren en la región D y la imagen son todos los valores de la variable dependiente z que cumplen con el dominio de la función.

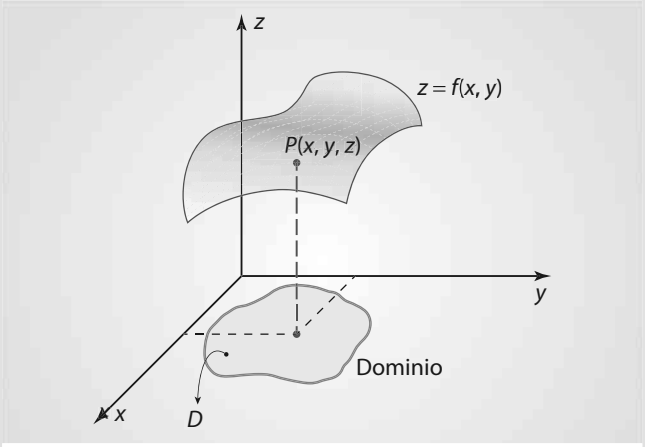


Figura 3.1

Ejemplo 3.1

Sea $f(x, y) = \dfrac{xy - 5}{2\sqrt{y - x^2}}$. Encontrar el domino D de f.

Solución

Si se conociera la gráfica de la función, el dominio podría determinarse con facilidad; sin embargo, no siempre es posible conocer la gráfica de la función dada, por lo que es necesario realizar un análisis que consiste en determinar para qué valores de x y y existe la función.

En este caso, se puede notar que el denominador no puede ser cero, además de que la expresión que se encuentra dentro del radical debe ser positiva.

Analizando el denominador

$f(x, y)$ existe cuando $y - x^2 > 0 \Rightarrow y > x^2$. Esta condición garantiza que el radicando es mayor que cero y que el denominador es distinto de cero.

Por tanto, el dominio consiste en todos los valores de x y y que se encuentren por encima de la parábola $y > x^2$. En la figura 3.2 se aprecia la región que corresponde al dominio de la función.

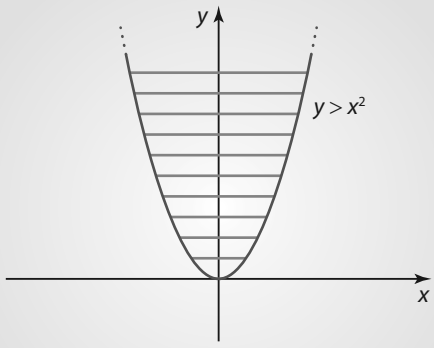


Figura 3.2

En forma semejante a como se definió una función de dos variables, una función *f* de tres variables se determina como una regla de correspondencia en la cual para cada tríada de valores de *x, y, z* existe uno y solo un valor de la variable dependiente *W*. En este caso el dominio es diferente, pues es necesario que los valores de *x*, *y* y *z* se encuentren dentro de un sólido *D*. Por tanto, es de esperar que no sea posible visualizar la gráfica de una función de tres variables, pues se requieren cuatro dimensiones geométricas y el espacio que se conoce solo tiene tres dimensiones; para solventar esto se puede representar un sólido que muestre el dominio y un eje vertical que represente la imagen o el contradominio de la función, como se observa en la figura 3.3.

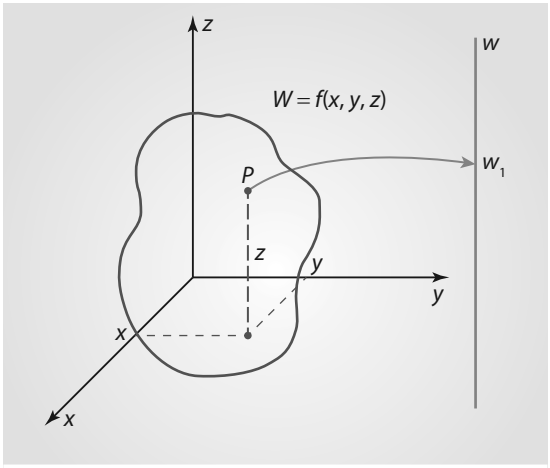


Figura 3.3

3.2 Curvas de nivel

Cuando un sólido es cortado por un plano se genera una huella del corte. Sin embargo, esta marca siempre es diferente para cada corte que se realice; a esta marca se le llama **curva de nivel**.

Las curvas de nivel se usan con mucha frecuencia en la elaboración de **mapas orográficos** o **planos de configuración**, en la actualidad son de gran importancia en los sistemas de información geográfica (GIS, por sus siglas en inglés), los cuales proporcionan datos de gran importancia para regiones, comunidades y ciudades en donde se requieran conocer datos de población, marginación y algunas otras cantidades de importancia para los gobiernos municipales y estatales.

En termodinámica, se usa una curva de nivel para representar las curvas de determinados procesos en donde la temperatura, la presión o el volumen son constantes (a esos gráficos se les llama isotermas, isobáricos o isocóricos). En la figura 3.4 aparece una superficie cortada por un plano, en donde se genera una curva de nivel a determinada altura *z* del corte.

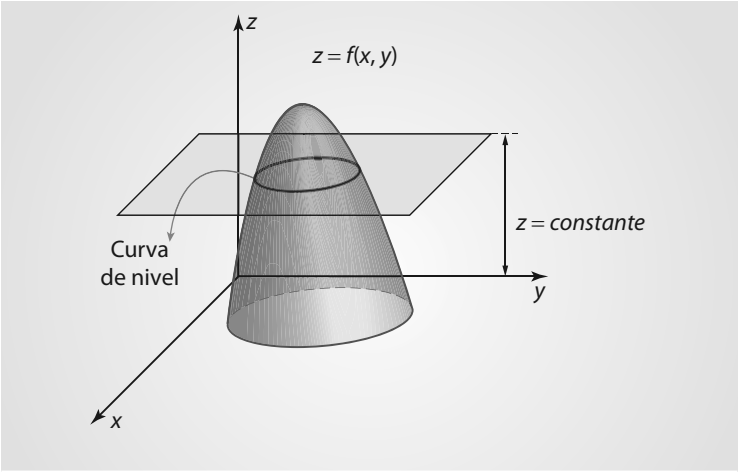


Figura 3.4

Ejemplo 3.2

Sea f la función con domino D tal que $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$. Trazar la gráfica de f e indicar las trazas (o curvas de nivel) en los planos $z = 4$ y $z = 10$.

Solución

Para encontrar las curvas de nivel solo es necesario sustituir el valor de z en la función para obtener la curva plana (huella del corte), como se muestra en la figura 3.5.

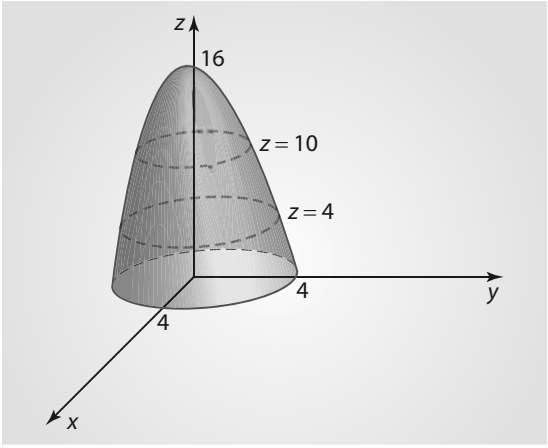


Figura 3.5

En forma semejante, si f es una función de tres variables (x, y y z), entonces los cortes que se obtienen no generan curvas de nivel sino **superficies de nivel**; por tanto, las superficies de nivel de f son las gráficas de $f(x, y, z) = c$ para los diversos valores de c.

Actividad de aprendizaje

En equipo de dos personas elaboren un programa que les ayude a obtener las gráficas de nivel del ejemplo 3.2. Expongan su trabajo en clase.

3.3 Límites y continuidad de funciones de varias variables

El concepto de límite es fundamental para comprender en forma adecuada la definición de derivada. De manera semejante a como se definió para funciones de una variable, este concepto ahora se extiende para funciones de dos variables.

Sea f una función de dos variables y considérese $f(x, y)$ cuando (x, y) varía dentro del dominio D; a cada punto (x, y) en el dominio de la función le corresponde un y solo un valor de la función $f(x, y)$.

Si la función se acerca a un valor fijo L, cuando (x, y) se aproxima cada vez más a un punto fijo (a, b) entonces esto se denota como:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L \qquad (3.2)$$

El cálculo de los límites de funciones de varias variables es muy semejante a como se realizan los cálculos en los primeros cursos de cálculo; es decir, se asigna un valor a la variable independiente lo suficientemente cercano al número al que se pretende llegar y después se sustituye en la función de la cual se desea conocer el límite; en caso de ser imposible encontrar el valor del límite mediante la sustitución descrita, entonces se realiza alguna simplificación adecuada para encontrar el límite solicitado.

Para el caso de los límites de los polinomios y las funciones racionales de dos variables, pueden calcularse por sustitución como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3

Hallar el límite.

$$\lim_{(x,y)\to(3,4)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Solución

Puesto que la función es continua en las parejas de puntos (x, y), solo se sustituyen en los límites, como se ve a continuación:

$$\lim_{(x,y)\to(3,4)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{7}{5}$$

En las funciones de una variable se demostró que $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe para una función con discontinuidad de salto en $x = 0$, probando que $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ no son iguales.

No obstante, para funciones de dos variables la situación es más complicada, porque en un plano coordenado hay una infinidad de curvas diferentes o trayectorias a lo largo de las cuales (x, y) puede acercarse a (a, b). Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ existe, entonces $f(x, y)$ tiende al límite L, independientemente de la trayectoria escogida.

Regla de las dos trayectorias

Si dos trayectorias que llevan a un punto $P(a, b)$ producen dos valores límites diferentes para la función dada f, entonces se dice que no existe el límite siguiente:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

Ejemplo 3.4

Demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ no existe.

Solución

En este caso, para encontrar el límite es necesario suponer dos trayectorias que concurran o lleguen al punto $(0, 0)$:

Primera trayectoria

Sea una trayectoria a lo largo del eje x, es decir,

$$y=0$$

Sustituyendo en la función se tiene:

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=1$$

Segunda trayectoria

Supóngase ahora una trayectoria a lo largo del eje y, es decir,

$$x=0$$

Sustituyendo en la función se tiene:

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=-1$$

Por tanto, el límite no existe, pues los límites son diferentes.

3.4 Derivadas parciales

En los cursos de cálculo de una variable se define la derivada como el límite de un cociente de dos incrementos, el significado geométrico es la pendiente de una recta tangente en un punto dado de una función. Como se vio en capítulos previos, la derivada se define matemáticamente como:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \textbf{(3.3)}$$

Al trabajar con funciones de varias variables es necesaria una definición similar a la de una variable, solo que los incrementos de la variable independiente deben realizarse a una sola variable a elegir; lo anterior significa que los **cambios son parciales**, de ahí el nombre de **derivadas parciales**. Así, dada $f(x, y)$, primero se incrementa una de las variables (por ejemplo x) en una cantidad h; luego, se divide entre h el incremento correspondiente $f(x + h, y) - f(x, y)$ de f, y por último se hace tender h a 0 (tal y como se define en la ecuación 3.3).

Definición 3.2

Sea f una función de dos variables, y las primeras derivadas parciales de f respecto a x y a y sean f_x y f_y (los subíndices indican respecto de qué variable se está derivando), las derivadas parciales de f con respecto a "x" y "y" se definen como:

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \qquad \textbf{(3.4)}$$

$$f_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} \qquad \textbf{(3.5)}$$

En lo que respecta al aspecto operativo, se puede decir que para realizar una derivada parcial se procede de igual manera a como se calculaban las derivadas ordinarias (de una variable), solo que si ahora se requiere derivar con respecto de x, la variable y que aparece en la función se considera como una constante durante todo el proceso de derivación.

Notación para las derivadas parciales

La **notación de las derivadas parciales** debe ser distinta de las derivadas ordinarias. Sin embargo, ésta debe conservar la esencia del concepto, por lo que debe introducirse la letra griega delta (con una deformación) para denotar a las derivadas parciales, como se muestra a continuación.

Si $w = f(x, y)$, entonces:

$$f_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \qquad f_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

Interpretación geométrica de las derivadas parciales

Puesto que la definición que se utilizó para las derivadas parciales fue la misma que para funciones de una variable, la interpretación geométrica no se modifica; es decir, ésta aún es la pendiente de rectas tangentes a una curva en un punto dado.

En la figura 3.6 aparece una función continua de la forma $z = f(x, y)$ Supóngase que un plano (por ejemplo, $x = cte.$) corta la superficie, dejando una huella o marca de corte como se indica.

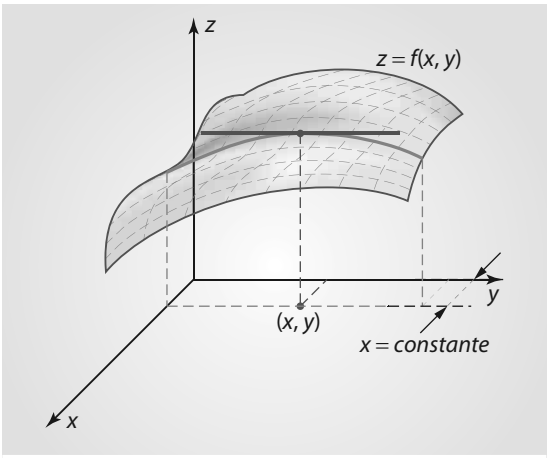


Figura 3.6

Esta marca o huella de corte es una curva que se genera al intersectar la superficie con el plano $x =$ *constante*. En este caso, si se ubica un punto dado sobre esa curva y se traza una tangente, es posible encontrar la pendiente de esa recta mediante la derivada parcial. Por tanto, se puede concluir que la derivada parcial es la pendiente de una recta tangente a una curva que se genera al cortar una superficie (función)

con un plano constante. En la figura 3.7 se aprecia la interpretación geométrica cuando la superficie se corta con un plano $y = constante$.

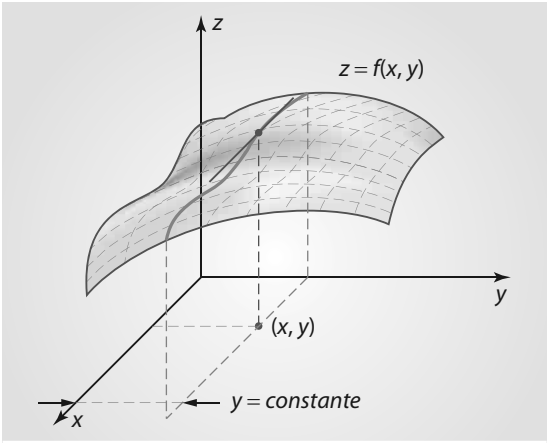


Figura 3.7

Las derivadas parciales pueden utilizarse cuando se requiere conocer una razón de cambio de alguna función que dependa de varias variables, y que modele algún fenómeno del que solo interese conocer el cambio cuando solo una variable independiente cambie y las demás permanezcan constantes.

Problemas de producción, de ingresos, de profundidad de recintos y de transferencia de calor, entre otros, son ejemplos clásicos en donde las derivadas parciales proporcionan muy buenos resultados.

Imagínese una placa caliente (véase figura 3.8) en la cual la temperatura puede escribirse como una función de dos variables de la forma:

$$T = f(x, y) \tag{3.6}$$

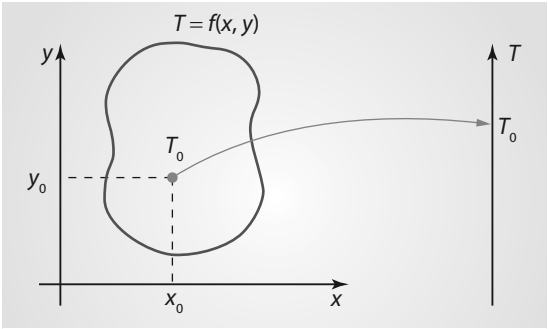


Figura 3.8

Entonces, a cada punto (x, y) le corresponde un valor dado de temperatura. Pero si se requiere conocer la tasa de variación instantánea de temperatura cuando el punto (x, y) se mueve en la dirección vertical (esto es, cuando la coordenada en x permanece constante), o bien cuando el punto se mueve en la dirección horizontal (es decir, cuando la coordenada en y permanece constante), las derivadas parciales de la ecuación (3.6) con respecto a x y y proporcionan estas razones instantáneas de cambio (véanse figuras 3.9 y 3.10).

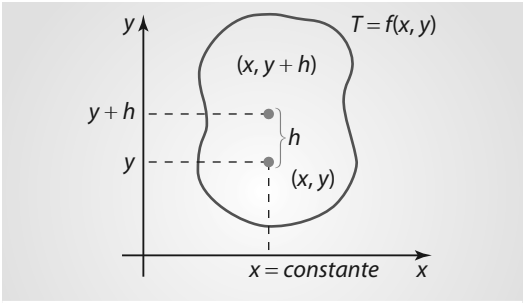


Figura 3.9

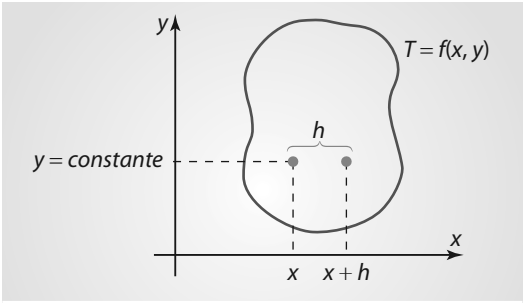


Figura 3.10

Para las funciones de tres o más variables, las primeras derivadas parciales se pueden obtener considerando constantes a todas las variables, menos una y se deriva respecto a la variable que no se considera constante.

Dada la función de tres variables $f(x, y, z)$, se pueden encontrar f_x, f_y, f_z, o bien $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.

Por ejemplo,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y, z+h) - f(x, y, z)}{h} \qquad \textbf{(3.7)}$$

Segundas derivadas parciales

Las segundas derivadas parciales se obtienen de forma similar a como se calculan éstas en las derivadas ordinarias; sin embargo, es necesario establecer la siguiente notación:

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} = (f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial y} = (f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = (f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = (f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Aquí, f_{xy} y f_{yx} se llaman **segundas derivadas parciales mixtas** (**o cruzadas**).

El siguiente teorema (sin demostración) afirma que, en condiciones adecuadas, las derivadas parciales cruzadas son iguales; es decir, el orden de derivación no altera el resultado.

Teorema 3.1

Sea f una función de dos variables x y y, y sean f, f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} continuas en una región abierta R. Por tanto, se verifica que:

$$f_{xy} = f_{yx} \qquad \textbf{(3.8)}$$

En forma similar, para funciones de tres variables, si $W = f(x, y, z)$ y tiene segundas derivadas parciales continuas, se tiene:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x} \qquad \textbf{(3.9)}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial y}$$

Actividad de aprendizaje

Según tu carrera busca un ejemplo de aplicación de derivadas parciales. Con la ayuda de una presentación electrónica expón tu ejemplo frente al grupo.

3.5 Derivadas direccionales

En esta sección se generaliza el concepto de derivada de una función de varias variables, pues cuando se trataron las derivadas parciales, se interpretó que el resultado era la pendiente de una recta tangente a una curva que se generaba cuando una superficie se cortaba con un plano $x = constante$ o $y = constante$, es decir, solo se podía cortar la superficie en forma paralela al eje x o bien al eje y. Sin embargo, si el corte se realiza de manera oblicua, es decir a un ángulo (o dirección θ), la curva de intersección generada sería completamente distinta a las que se obtuvieron con la derivación parcial (véase figura 3.11).

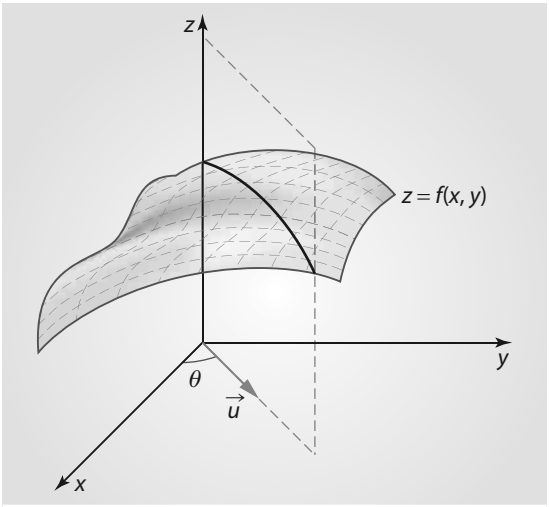


Figura 3.11

Como se aprecia en la figura 3.11, es necesario tener una dirección específica de corte, o bien un vector unitario que le dé dirección al corte; lo anterior puede escribirse como:

$$\vec{u} = u_1 \hat{\mathbf{i}} + u_2 \hat{\mathbf{j}} \qquad \textbf{(3.10)}$$

$$\vec{u} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{j}} \qquad \textbf{(3.11)}$$

Como es de suponer, la derivada que requiere una dirección específica debe tener un nombre distinto, por lo que ahora es posible definirla como **derivada direccional.** Asimismo, para calcularla es necesario tomar en cuenta las derivadas parciales en x y y, ya que éstas proporcionan razones de cambio en esas direcciones. Para comprender mejor lo anterior, a continuación se da un tratamiento de cómo definir en forma adecuada una derivada direccional.

Sea $\vec{u} = u_1\hat{\mathbf{i}} + u_2\hat{\mathbf{j}}$ un vector unitario. Si $\vec{u}$ se representa con un vector con punto inicial $P(x, y)$, entonces su punto final tiene coordenadas $(x + u_1, y + u_2)$.

Se desea definir la razón de cambio de $f(x, y)$ con respecto a la distancia en la dirección determinada por $\vec{u}$ (véase figura 3.12).

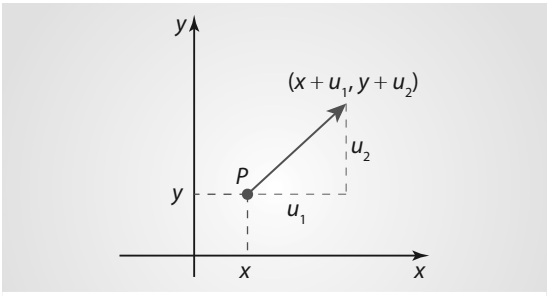


Figura 3.12

Sea l la recta que pasa por P y es paralela a $\vec{u}$ y sea Q un punto cualquiera en l. El vector $\overrightarrow{PQ}$ corresponde al múltiplo escalar $S\vec{u} = (Su_1)\hat{\mathbf{i}} + (Su_2)\hat{\mathbf{j}}$ para algún S; por tanto, las coordenadas de Q son:

$$(x + Su_1\, y + Su_2)$$

Como $\vec{u}$ es un vector unitario, entonces:

$$\overrightarrow{PQ} = S\hat{u} = |S|\,\hat{u} = |S| \text{ (véase figura 3.13).}$$

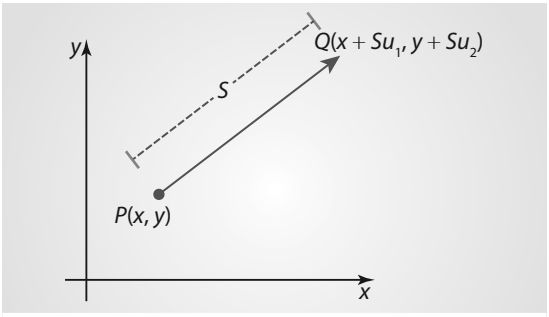


Figura 3.13

Entonces, S es la distancia medida desde P hasta Q. Es importante hacer notar aquí que si $S > 0$, entonces $S\vec{u}$ tiene las mismas direcciones de $\vec{u}$ por el contrario, si $S < 0$, entonces $S\vec{u}$ tiene dirección opuesta.

Si la dirección de un vector no varía de P a Q, entonces el incremento ΔW de $W = f(x, y)$ es:

$$\Delta W = f(x + Su_1, y + Su_2) - f(x, y) \qquad \textbf{(3.12)}$$

La razón cambio de $f(x, y)$ con respecto a S se puede escribir como:

$$\frac{\Delta W}{S} = \frac{f(x+Su_1, y+Su_2) - f(x,y)}{S} \qquad \textbf{(3.13)}$$

Finalmente, la razón de cambio instantánea de $f(x, y)$ en P, en la dirección determinada por $\vec{u}$, se obtiene hallando el límite del cociente (3.13) cuando $S \to 0$, como se advierte en la definición siguiente.

Definición 3.3

Sean $W = f(x, y)$ y $\vec{u} = u_1\hat{\mathbf{i}} + u_2\hat{\mathbf{j}}$ un vector unitario. La derivada direccional de f en $P(x, y)$ en la dirección de $\vec{u}$ se denota por:

$$D_u f(x,y) = \lim_{S\to 0} \frac{f(x+Su_1,\ y+Su_2) - f(x,y)}{S} \qquad \textbf{(3.14)}$$

Es de gran importancia hacer notar que las primeras derivadas parciales de f son casos particulares de la derivada direccional.

Específicamente, si $\vec{u} = \hat{\mathbf{i}} \Rightarrow u_1 = 1, u_2 = 0$, la ecuación (3.14) se reduce a:

$$D_{\mathbf{i}} f(x,y) = \lim_{S\to 0} \frac{f(x+S,\ y) - f(x,y)}{S} \qquad \textbf{(3.15)}$$

Si $u = \hat{\mathbf{j}}$, entonces:

$u_1 = 0 \qquad u_2 = 1$

De este modo,

$$D_{\mathbf{j}} f(x,y) = \lim_{S\to 0} \frac{f(x,\ y+S) - f(x,y)}{S} \qquad \textbf{(3.16)}$$

En el siguiente teorema (sin demostración) se enuncia la manera práctica de encontrar una derivada direccional dado un vector unitario.

Teorema 3.2

Si f es una función diferenciable de dos variables y $\vec{u} = u_1\hat{\mathbf{i}} + u_2\hat{\mathbf{j}}$ es un vector unitario, entonces la derivada direccional de la función f en la dirección de $\vec{u} = u_1\hat{\mathbf{i}} + u_2\hat{\mathbf{j}}$ se escribe como:

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y)\, u_1 + f_y(x, y)\, u_2 \qquad \textbf{(3.17)}$$

Ejemplo 3.5

Para la función $f(x, y) = x^3y^2$, calcular la derivada direccional de f en el punto $P(-1, 2)$ y en la dirección del vector $\vec{a} = 4\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}}$.

Solución

En la figura 3.14 se muestra el punto P y el vector dado; es decir, el lugar en donde se requiere hallar la derivada direccional, así como la dirección.

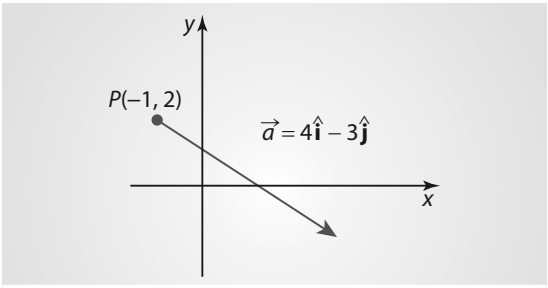


Figura 3.14

El vector unitario puede calcularse como sigue:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{5}\left(4\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}}\right) = \frac{4}{5}\hat{\mathbf{i}} - \frac{3}{5}\hat{\mathbf{j}}$$

Por tanto, las derivadas parciales son:

$$f_x(x, y) = 3x^2y^2 \qquad f_y(x, y) = 2x^3y$$

Del teorema 3.2 se tiene que la derivada direccional para cualquier punto $P(x, y)$ es:

$$D_u f(x,y) = \left(3x^2y^2\right)\frac{4}{5} + \left(2x^3y\right)\frac{3}{5}$$

Evaluando para el punto $P(-1, 2)$,

$$D_u f(-1, 2) = \frac{48}{5} + \frac{12}{5} = 12$$

Existe una manera alternativa de encontrar derivadas direccionales utilizando un operador diferencial vectorial, así como el producto punto (o producto escalar). Dicha alternativa permite identificar las direcciones donde las derivadas direccionales son las más grandes o las más pequeñas.

El vector nabla $\vec{\nabla}$

El **vector nabla** es un operador diferencial vectorial que puede escribirse en dos dimensiones como:

$$\vec{\nabla}(\ ) = \frac{\partial}{\partial_x}(\ )\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial_y}(\ )\hat{\mathbf{j}} \qquad \textbf{(3.18)}$$

en tanto que en tres dimensiones se escribe como:

$$\vec{\nabla}(\ ) = \frac{\partial}{\partial_x}(\ )\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial_y}(\ )\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial_z}(\ )\hat{\mathbf{k}} \qquad \textbf{(3.19)}$$

Definición 3.4

Gradiente de una función

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables. El gradiente de $f(x, y)$ es la función vectorial dada por:

$$\vec{\nabla} f(x, y) = f_x(x, y)\hat{\mathbf{i}} + f_y(x, y)\hat{\mathbf{j}} \qquad \textbf{(3.20)}$$

Nótese que el gradiente se obtiene al sustituir la función en la ecuación (3.18). Como se ve a continuación, las propiedades y bondades del vector gradiente son muy útiles para el cálculo de las derivadas direccionales y en problemas de optimización de la física matemática.

Derivada direccional en términos del gradiente

De la definición dada por la ecuación (3.17), es posible observar que la derivada direccional contiene términos definidos anteriormente; es decir, contiene las derivadas parciales (como las que tiene el vector gradiente) y las componentes del vector unitario:

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y)\, u_1 + f_y(x, y)\, u_2$$

Es importante destacar que si el gradiente se multiplica escalarmente con el vector unitario, se obtiene la derivada direccional; esto es,

$$D_u f(x, y) = \vec{\nabla} f(x, y) \cdot \vec{u} \qquad \textbf{(3.21)}$$

La ecuación (3.21) permite encontrar la derivada direccional con sólo realizar el producto escalar entre el vector gradiente y el vector unitario.

Otra de las ventajas importantes de tener esta notación para las derivadas direccionales, es que se puede determinar la dirección para la cual la magnitud de la derivada direccional es máxima o mínima, lo que se puede distinguir en el siguiente teorema.

Teorema 3.3

Teorema del gradiente

Sea f una función de dos variables que es diferenciable en el punto $P(x, y)$:

a) El valor máximo de $D_u f(x, y)$ en $P(x, y)$ es $\|\vec{\nabla} f(x, y)\|$.

b) La tasa de crecimiento máxima de $f(x, y)$ en $P(x, y)$ se alcanza en la dirección de $\vec{\nabla} f(x, y)$.

Demostración

Considérese al punto $P(x, y)$ y al vector $\vec{\nabla} f(x, y)$ como fijos (pero arbitrarios) y al vector unitario $\vec{u}$.

Sea θ el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{\nabla} f(x, y)$ donde:

$$\begin{aligned} D_u f(x,y) &= \vec{\nabla} f(x,y) \cdot \vec{u} \\ &= \left\| \vec{\nabla} f(x,y) \right\| \left\| \vec{u} \right\| \cos\theta \\ &= \left\| \vec{\nabla} f(x,y) \right\| \cos\theta \end{aligned}$$

Como $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, el valor máximo de $D_u f(x, y)$ se alcanza cuando $\cos\theta = 1$; por tanto, los vectores gradiente y unitario deben formar un ángulo de cero grados; es decir, éstos deben ser paralelos. Además de que el módulo del vector unitario es la unidad (por definición), se puede concluir que el valor máximo de la derivada direccional es:

$$D_u f(x,y) = \left\| \vec{\nabla} f(x,y) \right\| \qquad \textbf{(3.22)}$$

Por su parte, la dirección de máximo crecimiento que se dará en la dirección del gradiente es:

$$\vec{\nabla} f(x, y).$$

En forma semejante, el valor mínimo de la derivada direccional se obtiene cuando el ángulo entre el gradiente y el vector unitario es de 180° (para que $\cos\theta = -1$). Por tanto, el valor mínimo de la derivada direccional es:

$$D_u f(x,y) = -\left\| \vec{\nabla} f(x,y) \right\| \qquad \textbf{(3.23)}$$

Por su parte, la dirección de mínimo crecimiento se encuentra en el negativo del gradiente:

$$-\vec{\nabla} f(x, y)$$

Para funciones de tres variables, el resultado es semejante al mostrado anteriormente.

Actividad de aprendizaje

En equipos de dos o tres estudiantes elaboren un video donde expliquen con detalle que es un gradiente de una función y su importancia en la ingeniería o ciencias. Sean creativos.

3.6 Diferencial total

El concepto de **diferencial** en el cálculo de varias variables es muy importante para hallar aproximaciones e incrementos en problemas de aplicación, así como en la definición misma de la integral. Por ello, a continuación se define el concepto de diferencial para funciones de varias variables.

Recuérdese que para una función de una variable $y = f(x)$ el incremento de la variable dependiente puede escribirse como:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \textbf{(3.24)}$$

De manera análoga, para una función de dos variables $z = f(x, y)$ el incremento se define como:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

La siguiente figura muestra que Δz corresponde al cambio de la función cuando (x, y) varía hasta el punto $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

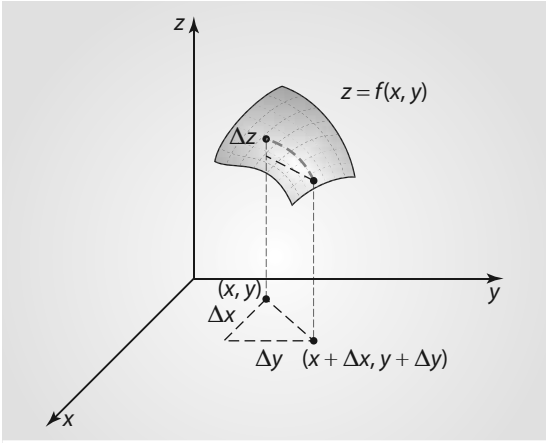


Figura 3.15

Ejemplo 3.6

Evaluar Δz para $z = x^2 - xy$ y determinar cuál es el cambio en la función de (1, 1) a (1.2, 0.7).

Solución

De la definición del incremento dada antes se tiene que:

$$\Delta z = [(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x)(y+\Delta y)] - (x^2 - xy)$$
$$= (2x - y)\Delta x - x\Delta y + (\Delta x)^2 - \Delta x \Delta y$$

Con $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0.2$, $\Delta y = -0.3$, el incremento de la variable dependiente es:

$$\Delta z = (1)(0.2) - (1)(-0.3) + (0.2)^2 - (0.2)(-0.3) = 0.6$$

Nota: En el ejemplo anterior, cuando los incrementos son suficientemente pequeños, es decir, cuando:

$$\Delta x \to 0, \quad \Delta y \to 0$$
$$\Delta x \approx dx, \quad \Delta y \approx dy$$

entonces los productos $(\Delta x)^2$ y $\Delta x \Delta y$ son mucho más pequeños, lo que implica que el incremento de la variable dependiente pueda escribirse como:

$$\Delta z \approx dz$$

A lo anterior se le denomina **diferencial total**, ya que se permite que las variables independientes sufran incrementos infinitesimales.

Asimismo, del ejemplo anterior puede notarse que los coeficientes de Δx y Δy tienen algo especial, pues representan las derivadas parciales respecto de x y de y respectivamente, de la función original. El resultado anterior no es accidental, y como consecuencia de esto se puede definir la diferencial total como se muestra a continuación.

Sea $z = f(x, y)$ una función para la cual existen las primeras derivadas parciales f_x y f_y.

Si las diferenciales de las variables independientes son:

$$dx = \Delta x \qquad dy = \Delta y,$$

la diferencial total puede escribirse como:

$$dz = f_x(x, y)\, dx + f_y(x, y)\, dy$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \qquad \textbf{(3.25)}$$

De manera análoga, para funciones de tres variables de la forma $W = f(x, y, z)$ se tiene que:

$$dx = \Delta x \qquad dy = \Delta y \qquad dz = \Delta z$$

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz \qquad \textbf{(3.25a)}$$

Actividad de aprendizaje

Investiga en diferentes libros de texto la definición de diferencial total. Con la información recabada anota en el siguiente espacio tu propia definición. Compara con tus compañeros.

3.7 Planos tangentes y rectas normales a las superficies

Como se recordará de los cursos de geometría analítica, las rectas tangentes y normales a funciones planas se encuentran a partir del concepto de pendiente de una recta; entender esto resulta muy importante para comprender de manera plena la definición de derivada. De acuerdo con lo anterior, a continuación se generaliza lo estudiado en la geometría bidimensional para su uso en superficies; es decir, a partir de aquí es posible determinar las ecuaciones de planos tangentes y rectas normales en sólidos.

Sea S una superficie que puede representarse mediante la ecuación $F(x, y, z) = 0$, donde F tiene primeras derivadas continuas, y sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto de S en el que F_x, F_y, F_z no son todas cero. Por tanto, una recta l, tangente al sólido S en P_0, es por definición una recta tangente a "cualquier curva C" que se encuentre en S y que contiene a P_0.

Sea C una curva con ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \\ z &= h(t) \end{aligned} \qquad \textbf{(3.26)}$$

Si $\vec{r}(t) = \langle f(t),\ g(t),\ h(t) \rangle$ es un vector de posición sobre la curva C, entonces $\vec{r}\,'(t) = \langle f'(t),\ g'(t),\ h'(t) \rangle$ es un vector tangente a C en $P(x, y, z)$, como se ve en la figura 3.16.

Para cada valor de t, el punto $\langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ en C también está en S, y por tanto,

$$F(f(t), g(t), h(t)) = 0$$

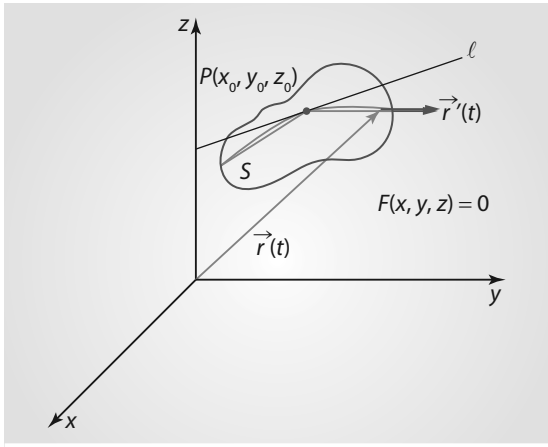


Figura 3.16

Sea:

$$W = F(x, y, z)$$

y además,

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t).$$

Aplicando la regla de la cadena y tomando en cuenta que $W = 0$ para todo t, se tiene:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0 \qquad \textbf{(3.27)}$$

La ecuación anterior debe ser igual a cero, pues si $W = 0$, entonces su derivada también lo será.

De la ecuación anterior (3.27) se puede notar que:

$$F_x(x, y, z)\, f'(t) + F_y(x, y, z)\, g'(t) + F_z(x, y, z)\, h'(t) = 0$$

o en forma alterna,

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) \cdot r'(t) = 0 \qquad \textbf{(3.28)}$$

para cada punto $P(x, y, z)$ en C.

En particular, si se corresponde $P_0(x_0, y_0, z_0)$ a $t = t_0$, entonces,

$$\vec{\nabla} F(x_0, y_0, z_0) \cdot r'(t_0) = 0$$

Como $\vec{r}'(t_0)$ es un vector tangente a C en P_0, esto implica que el vector $\vec{\nabla}F(x_0, y_0, z_0)$ es perpendicular (por la definición de producto escalar, en donde el ángulo entre los vectores es 90°) a toda recta tangente l a S en P_0 (véase figura 3.17).

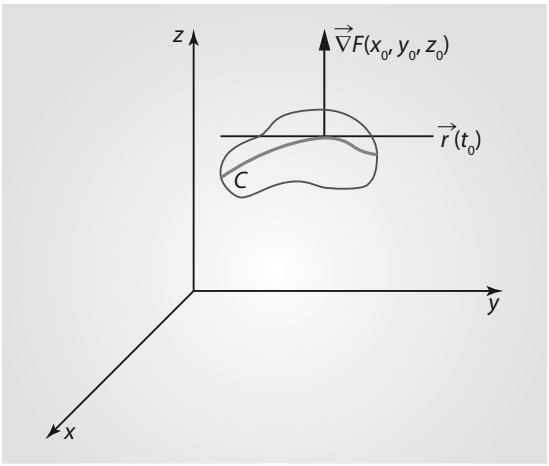


Figura 3.17

El plano que pasa por P_0 y tiene vector normal $\vec{\nabla}F(x_0, y_0, z_0)$ es el plano tangente a S en P_0. Por tanto, toda recta tangente l a S en P_0 se encuentra en el plano tangente en P_0.

Teorema 3.4

Sea $F(x, y, z)$ una función con primeras derivadas parciales continuas y sea P_0 un punto en la superficie S definida por $F(x, y, z) = 0$. Si F_x, F_y, F_z no son todas cero en P_0, entonces el vector $\vec{\nabla}F(x_0, y_0, z_0)$ es normal al plano tangente a S en P_0.

Corolario

La ecuación del plano tangente a la gráfica de $F(x, y, z) = 0$ en $P(x_0, y_0, z_0)$ está dado por:

$$F_x(x_0, y_0, z_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)\,(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)\,(z - z_0) = 0 \qquad \textbf{(3.29)}$$

Para comprender físicamente lo anterior, supóngase un cuerpo tridimensional cuya temperatura en cualquier punto $P(x, y, z)$ se obtiene a partir de la función $W = F(x, y, z)$. Si $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto fijo sobre el sólido, entonces la gráfica de la ecuación $F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0)$ es la superficie de nivel que pasa por P_0.

En este caso, en todos los puntos de esta superficie la temperatura es:

$$W_0 = F(x_0, y_0, z_0)$$

La figura 3.18 muestra varias superficies que pasan por los puntos P_0, P_1 y P_2, los cuales corresponden a las temperaturas W_0, W_1 y W_2, donde $\vec{\nabla}F\big|_{P_0}$, $\vec{\nabla}F\big|_{P_1}$ y $\vec{\nabla}F\big|_{P_2}$ son vectores perpendiculares (normales) a las superficies correspondientes en P_0, P_1 y P_2, respectivamente.

Es importante mencionar que la máxima razón de cambio se encuentra en la dirección de $\vec{\nabla}F(x_0, y_0, z_0)$ por tanto, esta razón máxima de cambio se alcanza en una dirección normal a la superficie de nivel F que contiene a P_0 (véase figura 3.18).

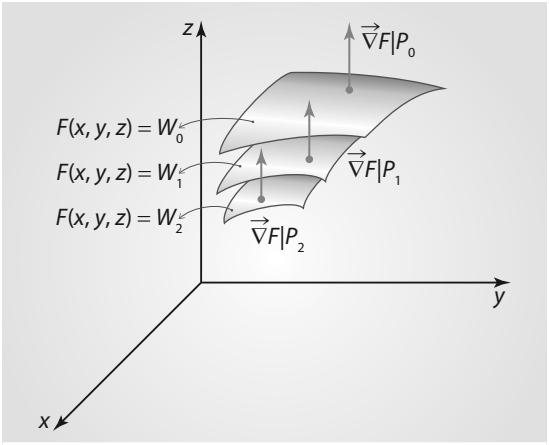


Figura 3.18

TEOREMA 3.5

Sea S la superficie de tres variables que es diferenciable en $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y sea S la superficie de nivel de F que contiene a P_0. Si $\vec{\nabla}F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces este vector es normal a S en P_0. En consecuencia, S es normal a la dirección en que la razón de cambio de $F(x, y, z)$ en P_0 es máxima.

EJEMPLO 3.7

Encontrar la curva de nivel de $f(x, y) = -x^2 + y^2$ que pasa por el punto $(2, 3)$ y trazar el gradiente de f en ese punto.

Solución

Como $f(2, 3) = -4 + 9 = 5$, la curva de nivel es la hipérbola $-x^2 + y^2 = 5$ (véase figura 3.19).

Ahora bien,

$$\vec{\nabla}f(x, y) = -2x\hat{\mathbf{i}} + 2y\hat{\mathbf{j}} \text{ y } \vec{\nabla}f(2, 3) = -4\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}}$$

es un vector perpendicular a la curva de nivel en el punto $(2, 3)$.

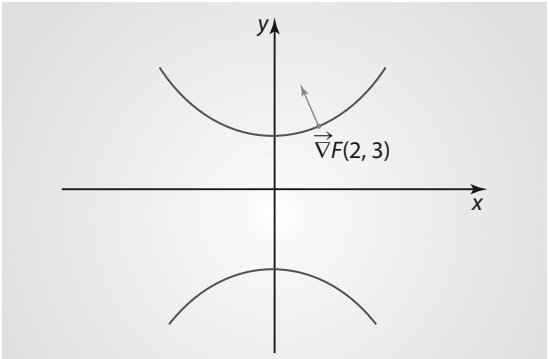


Figura 3.19

Ejemplo 3.8

Sea $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$. Dibujar la superficie de nivel de F que pasa por $P(1, 2, 11)$ y trazar un vector con punto inicial P que corresponde a $\vec{\nabla}F(1, 2, 11)$.

Solución

La superficie de nivel es de la forma $F(x, y, z) = c$, en particular para $P(1, 2, 11)$:

$$F(x, y, z) = F(1, 2, 11)$$

donde:

$$x^2 + y^2 + z = 16$$

$$z = 16 - x^2 - y^2 \Rightarrow \text{Paraboloide}$$

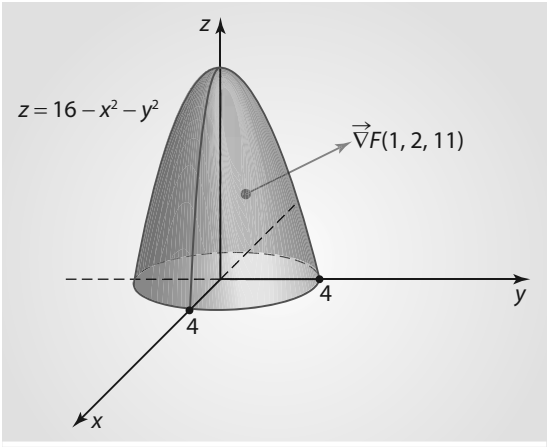


Figura 3.20

El gradiente de F es:

$$\vec{\nabla}F(x,y,z) = 2x\hat{\mathbf{i}} + 2y\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

Así que en $P(1, 2, 11)$ se tendrá

$$\vec{\nabla}F(1,\ 2,\ 11) = 2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

Por lo anterior, el vector $\vec{\nabla}F(1,\ 2,\ 11)$ es ortogonal a la superficie de nivel en P.

Ejemplo 3.9

Sea $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.

a) Trazar la curva de nivel C de f que pasa por el punto $P(3, 1)$ y un vector con punto inicial en P que corresponda a $\vec{\nabla}f(3, 1)$.

b) Explicar el significado del inciso a) en términos de la gráfica de f.

Solución

La gráfica de superficie es un paraboloide orientado positivamente hacia el eje *z*, como se muestra en la figura 3.21.

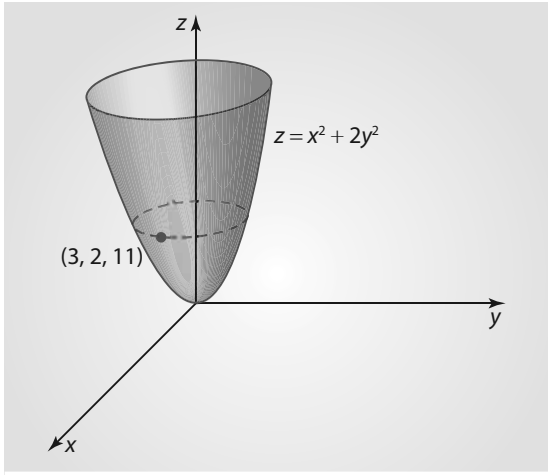


Figura 3.21

a) La curva de nivel se obtiene al evaluar el punto (3, 1) en la superficie (véase figura 3.22).

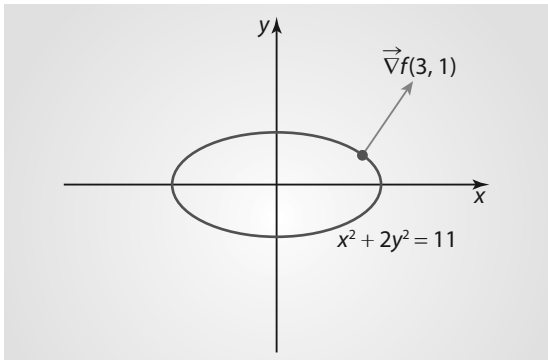


Figura 3.22

El gradiente de *f* es:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = 2x\hat{\mathbf{i}} + 4y\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\nabla} f(3,\ 1) = 6\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}$$

b) La gráfica de *f*, es decir $z = x^2 + 2y^2$, es un paraboloide elíptico donde la curva de nivel $x^2 + 2y^2 = 11$ en *xy* es la traza del paraboloide en el plano $z = 11$. La razón de cambio máxima de $f(x, y)$ en $P(3, 1)$ se alcanza cuando el punto (x, y) se mueve en el plano *xy* en la dirección del vector $\vec{\nabla} f(3, 1)$.

Actividad de aprendizaje

En equipo de dos o tres personas resuelvan con la ayuda de algún software el ejemplo 3.8. Expliquen con sus propias palabras su solución. Entreguen a su profesor por escrito su trabajo.

3.8 Rectas en el espacio. Repaso

En la sección Problemas resueltos de este capítulo se incluyen diversos ejercicios en los que es necesario recordar los conceptos y las expresiones de rectas en el espacio, que se estudiaron en el capítulo 1. A fin de recordar con precisión estos conceptos, en esta sección se hace un recordatorio general.

Ecuaciones paramétricas de una recta en el espacio

Sean $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ un vector diferente de cero en V_3, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto arbitrario y $\overrightarrow{OA}$ el vector de posición de $\vec{a}$. Como se muestra en la figura 3.23, la recta l que pasa por $P_1(x_1, y_1, z_1)$ es paralela a $\vec{a}$ y se define como el conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$, tales que $\overrightarrow{P_1P}$ es paralelo a $\overrightarrow{OA}$ es decir, $\overrightarrow{P_1P} = t\overrightarrow{OA}$ para un escalar t.

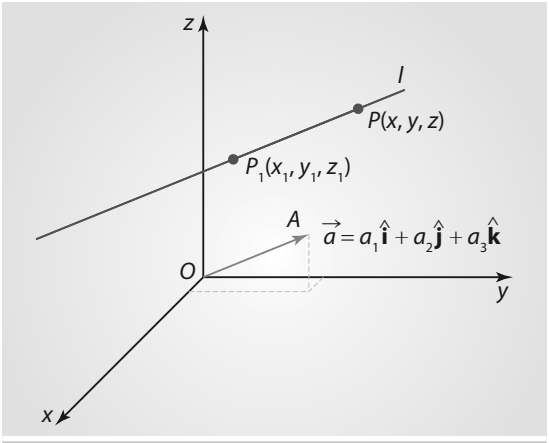


Figura 3.23

En términos de vectores,

$$\langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle = t\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle ta_1, ta_2, ta_3 \rangle$$

Igualando las componentes,

$$\begin{aligned} x &= x_1 + a_1 t \\ y &= y_1 + a_2 t \\ z &= z_1 + a_3 t \end{aligned} \qquad \textbf{(3.30)}$$

Las expresiones anteriores reciben el nombre de **ecuaciones paramétricas de una recta en el espacio**.

Ecuación vectorial de una recta

Al igual que en el plano, dos puntos distintos cualesquiera en el espacio de tres dimensiones determinan una recta única que pasa por ellos. Para encontrar una ecuación de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, supóngase que $P(x, y, z)$ es cualquier punto de la recta (véase figura 3.24).

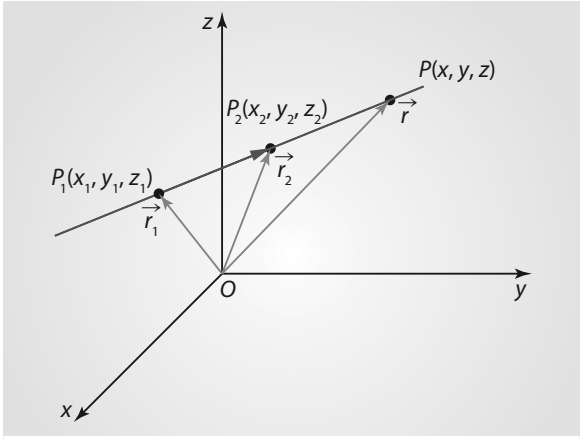


Figura 3.24

Si $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP}_1$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OP}_2$ se puede ver que el vector $\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ es paralelo al vector $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$:

$$\vec{r} - \vec{r}_2 = t\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)$$

Por tanto, es posible escribir:

$$\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

Sustituyendo,

$$\vec{r} = \vec{r}_2 + t\vec{a} \qquad \text{Ecuación vectorial} \qquad \textbf{(3.31)}$$

Al vector $\vec{a}$ se le llama **vector director de la recta**.

En resumen, la recta en el espacio puede representarse de tres formas:

1. **Ecuaciones paramétricas**

$$\overrightarrow{P_1P} = t\overrightarrow{OA}$$

$$\langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle = t\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

Igualando componentes,

$$x = x_1 + a_1 t$$
$$y = y_1 + a_2 t$$
$$z = z_1 + a_3 t$$

Ecuación de una recta en el espacio que pasa por: $P_1(x, y, z)$ y es paralela a $\vec{a} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}$ **(3.32)**

2. **Ecuaciones en forma simétrica**

De las ecuaciones anteriores, eliminando el parámetro t se tiene:

$$t = \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3} \qquad \textbf{(3.33)}$$

3. Ecuación vectorial

$$\vec{r} = \vec{r}_2 + t\vec{a} \qquad \textbf{(3.34)}$$

Ejemplo 3.10

a) Encontrar ecuaciones paramétricas para la recta l que pasa por $P(5, -1, 4)$ y es paralela al vector $\left\langle \frac{1}{2}, 2, -\frac{2}{3} \right\rangle$.

b) Determinar en qué punto la recta l corta al plano xy.

Solución

a) Para evitar trabajar con fracciones en las componentes del vector director, éste se puede modificar (sin cambiar la orientación de la recta) multiplicándolo por el mínimo común múltiplo de sus denominadores como sigue:

$$\vec{b} = 6\vec{a} = \langle 3, 12, -4 \rangle$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = x_1 + a_1 t \qquad x = 5 + 3t$$
$$y = y_1 + a_2 t \qquad y = -1 + 12t$$
$$z = z_1 + a_3 t \qquad z = 4 - 4t$$

b) La recta corta al plano xy cuando $z = 0$. Por tanto, de la ecuación paramétrica se tiene:

$0 = 4 - 4t$ implica que $t = 1$, sustituyendo en las ecuaciones paramétricas se obtienen los valores de "x" y "y", siendo:

$x = 8$, $y = 11$, se tiene $P(8, 11, 0)$.

Ejemplo 3.11

Hallar las ecuaciones paramétricas para la recta l que pasa por $P_1(3, 1, -2)$ y $P_2(-2, 7, -4)$.

Solución

Para hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos arbitrarios $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ se usa el vector $\vec{a}$ correspondiente a $\overrightarrow{P_1P_2}$ es decir,

$$\vec{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

Sustituyendo en el teorema de ecuaciones paramétricas se tiene:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + a_1 t \\ y &= y_1 + a_2 t \\ z &= z_1 + a_3 t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y &= y_2 + (y_2 - y_1)t \\ z &= z_1 + (z_2 - z_1)t \end{aligned}$$

Por tanto, el vector $\vec{a}$ en V_3 es:

$$\vec{a} = \langle -2-3, 7-1, -4+2 \rangle$$

$$\vec{a} = \langle -5, 6, -2 \rangle$$

Usando como punto inicial $P_1(3, 1, -2)$, se tendrá:

$$x = 3 - 5t$$
$$y = 1 + 6t$$
$$z = -2 - 2t$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Elabora un mapa mental donde resumas los conceptos del capítulo. Compáralo con tus compañeros.

Problemas para resolver

3.1 Determinar el dominio de la función:

$$f(u,v)=\frac{uv}{u-2v}$$

3.2 Determinar el dominio de *f*:

$$f(x,y,z)=\sqrt{25-x^2-y^2-z^2}$$

3.3 Calcular el límite (si existe).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2-y^2}{x^2+2y^2}$$

3.4 Hallar el límite (si existe).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

3.5 Sea $W=3x^2y^3z+2xy^4z^2-yz$. Hallar W_{xyz}.

3.6 Sea $W=\operatorname{sen} xyz$. Hallar $\dfrac{\partial^3 W}{\partial z\,\partial y\,\partial x}$.

3.7 Sea $W=r^4s^3t-3s^2e^{rt}$. Verificar que $W_{rrs}=W_{rsr}$.

3.8 Una lámina de metal plana está situada en un plano *xy* y la temperatura, *T*, en °C en el punto (x, y) es inversamente proporcional a la distancia al origen.

a) Describir las isotermas.

b) Suponiendo que la temperatura en el punto $P(4, 3)$ es 40 °C, encontrar la ecuación de la isoterma a la temperatura correspondiente de 40 °C.

3.9 Una lámina de metal plana se encuentra en un plano *xy,* y la temperatura, *T*, en (x, y) está dada por:

$$T=10(x^2+y^2)^2$$

donde:

T [°C] y x y y [cm]

a) Calcular la tasa de cambio o variación de *T* respecto a la distancia en el punto (1, 2) en dirección del eje *x*.

b) Calcular la tasa de cambio o variación de *T* respecto a la distancia en el punto (1, 2) en dirección del eje *y*.

3.10 El potencial eléctrico V en un punto (x, y, z) está dado por $V = \dfrac{100}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}$ donde V está en volts y x, y, z en centímetros.

a) Calcular la razón de cambio de V con respecto a la distancia en $P(2, -1, 1)$ en la dirección del eje x.

b) Calcular la razón de cambio de V con respecto a la distancia en $P(2, -1, 1)$ en la dirección del eje y.

c) Calcular la razón de cambio de V con respecto a la distancia en $P(2, -1, 1)$ en la dirección del eje z.

3.11 Cuando una chimenea de h metros de altura arroja humo que tiene un contaminante, la concentración $C(x, z)$ en $\mu g/cm^3$ del contaminante en un punto a x kilómetros de la chimenea y a z metros de altura se puede obtener por:

$$C(x,z) = \frac{200}{x^2}\left[e^{-0.002(z-10)^2/x^2} + e^{-0.002(z+10)^2/x^2}\right]$$

Calcular e interpretar $\dfrac{\partial C}{\partial x}$ en el punto $(2, 5)$.

3.12 En ingeniería civil, cuando se estudia la penetración de congelamiento en los caminos, la temperatura (T) al tiempo (t) en horas, y a cada profundidad de x metros, está dada aproximadamente por:

$$T = T_0 e^{-\lambda x} \operatorname{sen}(wt - \lambda x)$$

donde T_0, w y λ son constantes.

Calcular $\dfrac{\partial T}{\partial t}$.

3.13 La capacidad de los pulmones es el mayor volumen (en ml) que se puede exhalar después de una inhalación máxima de aire. Para un humano adulto común, V está dado aproximadamente por:

$$V = 27.63\, y - 0.112xy$$

donde x es la edad (en años) y y la altura en centímetros.

a) Calcular e interpretar $\dfrac{\partial V}{\partial x}$.

b) Explicar por qué $\dfrac{\partial V}{\partial y}$ es difícil de interpretar.

3.14 Encontrar el gradiente de la función $f(x, y, z) = yz^3 - 2x^2$ en el punto $P(2, -3, 1)$.

3.15 Encontrar el gradiente de $f(x, y) = e^{3x} \tan y$ en el punto $P\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

3.16 Calcular la derivada direccional de $f(x, y) = x \cos^2 y$, en el punto $P\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$ en la dirección $\vec{a} = \langle 5, 1 \rangle$.

3.17 a) Calcular la derivada direccional de f en P, en la dirección de P a Q.

b) Encontrar un vector unitario en la dirección de máximo crecimiento de f en P y calcular la tasa de crecimiento de f en esa dirección.

c) Encontrar un vector unitario en la dirección en que f disminuye con mayor rapidez en P y calcular la razón de cambio de f en esa dirección.

Con $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $P(-2, 3, 1)$ y $Q(0, -5, 4)$.

3.18 La temperatura, T, en el punto (x, y) de una placa colocada en el plano xy es inversamente proporcional a la distancia al origen. La temperatura en $P(3, 4)$ es 100 °C.

a) Calcular la razón de cambio de T en P en la dirección del vector $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$.

b) Determinar en qué dirección aumenta con mayor rapidez T en P.

c) Establecer en qué dirección disminuye con mayor rapidez T en P.

3.19 El potencial eléctrico V, en un punto $P(x, y, z)$ de un sistema de coordenadas rectangulares es:

$$V = x^2 + 4y^2 + 9z^2$$

a) Calcular la tasa de cambio de V en $P(2, -1, 3)$ en la dirección de P al origen.

b) Encontrar la dirección que produce la máxima tasa de cambio de V en P.

c) Determinar cuál es la máxima tasa de cambio de V en P.

3.20 Considérese el plano que pasa por P y Q y es perpendicular al plano xy. Evaluar la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de este plano y la superficie dada en el punto indicado y en dirección hacia Q.

$$f(x, y) = (x - y)^2, P(4, 2), Q(0, 1)$$

3.21 Determinar las derivadas de $f(x, y) = x + y^2$ en $(3, 4)$, en la dirección de un vector tangente a la gráfica de $2x^2 + y^2 = 9$ en el punto $(2, 1)$.

3.22 Supóngase que $D_u f(a, b) = 7$ y $D_v f(a, b) = 3$, donde los vectores unitarios están dados por:

$$\vec{u} = \frac{5}{13}\hat{\mathbf{i}} - \frac{12}{13}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{v} = \frac{5}{13}\hat{\mathbf{i}} + \frac{12}{13}\hat{\mathbf{j}}$$

Evaluar $\vec{\nabla} f(a, b)$.

3.23 Sea C la traza del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ en el plano $x = 1$. Obténganse las ecuaciones paramétricas para la recta tangente l a la curva C en $P(1, 2, 4)$.

3.24 Obtener la ecuación del plano tangente a la gráfica de la ecuación dada en el punto dado:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9; P(-2, 2, 1)$$

3.25 Obtener la ecuación del plano tangente a la gráfica de la ecuación $x^2 - y^2 - 3z^2 = 5$, dada en el punto $(6, 2, 3)$.

3.26 Obtener la ecuación del plano tangente a la gráfica de la ecuación $z = \cos(2x + y)$ en el punto $P\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

3.27 Obtener una ecuación del plano tangente a la gráfica de la ecuación $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ dada en el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

3.28 Encontrar los puntos de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 7$, en los que el plano tangente sea paralelo al plano:

$$2x + 4y + 6z = 1$$

3.29 Hallar los puntos de la superficie $x^2 + 4x + y^2 + z^2 - 2z = 11$ en los cuales el plano tangente es horizontal (paralelo al plano xy).

3.30 Demostrar que $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$ es la ecuación del plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0, z_0).

3.31 Demostrar que todo plano tangente a la gráfica de $z^2 = x^2 + y^2$ pasa por el origen.

3.32 Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta normal a la superficie dada en P.

Sean:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 4, \quad P(1, -1, 1)$$

3.33 Obtener las ecuaciones simétricas de la recta normal a la superficie $z = 4x^2 + 9y^2 + 1$ en el punto $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3\right)$.

3.34 Se dice que dos superficies son ortogonales si sus vectores normales en un punto P son perpendiculares entre sí. Demostrar que las superficies dadas por $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ son ortogonales si y solo si:

$$F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0$$

3.35 Encontrar los puntos del hiperboloide $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ en los que el plano tangente es paralelo al plano $4x - 2y + 4z = 5$.

3.36 Considérese un comal caliente, en el cual la temperatura en un punto (x, y) está dada por:

$$T(x, y) = 5 + 2x^2 + y^2$$

Encontrar la trayectoria que un *chinicuil* (gusano comestible) debe seguir hacia el origen para no morir cocinado a partir de (4, 2).



Más problemas para resolver.

Capítulo

4

Integración múltiple



Competencias específicas a desarrollar

- Define la integral doble como el volumen bajo una superficie y sobre una región en el plano.
- Comprende el concepto de integrales iteradas para el cálculo de integrales dobles.
- Analiza los diferentes órdenes de integración en el cálculo de integrales dobles.
- Define el sistema de coordenadas polares y lo utiliza para calcular integrales dobles.
- Define la integral triple de una función de tres variables.
- Define los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas.
- Resuelve integrales múltiples en diferentes sistemas de coordenadas.
- Aplica la integración múltiple en el cálculo de centros de masa, momentos de inercia y masas de cuerpos heterogéneos.

4.1 La integral doble

Introducción

Hasta aquí se han tratado las funciones de varias variables, su definición, su gráfica, su dominio, sus límites y sus derivadas; sin embargo, es ineludible preguntar: ¿cuál es la forma en que estas funciones pueden integrarse y comprender su significado geométrico? En los cursos de cálculo de una variable, la integración se define a partir de una función plana de la forma $y = f(x)$, donde la variable independiente está definida en un intervalo abierto (a, b); geométricamente, se trata de hallar el área bajo una curva, como se muestra en la figura 4.1.

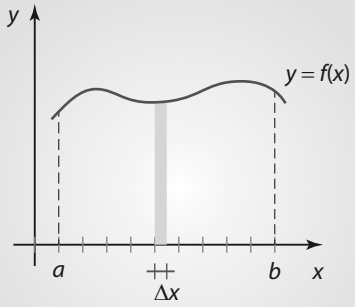


Figura 4.1

Nótese que al no tratarse de un área que pueda calcularse mediante alguna fórmula típica (por ejemplo, el área de un cuadrado, triángulo, rectángulo, etc.), es necesario dividir el dominio de la función (*a*, *b*) en pequeños intervalos, y construir franjas rectangulares lo suficientemente delgadas para encontrar el área de cada una de éstas, y luego sumar estas áreas de las franjas y aproximar el área solicitada. De este modo, el cálculo anterior permitió escribir

$$\Delta A = f(x)\,\Delta x \qquad \textbf{(4.1)}$$

$$dA = f(x)\,dx \qquad \textbf{(4.2)}$$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \textbf{(4.3)}$$

Empero, para funciones de dos variables el problema adquiere otro enfoque, pues el gráfico representa una superficie y el dominio es una región en el plano *xy*; de esta manera, es natural imaginar que la integral representa el volumen contenido bajo la superficie, cuya representación es una función de dos variables (véase figura 4.2).

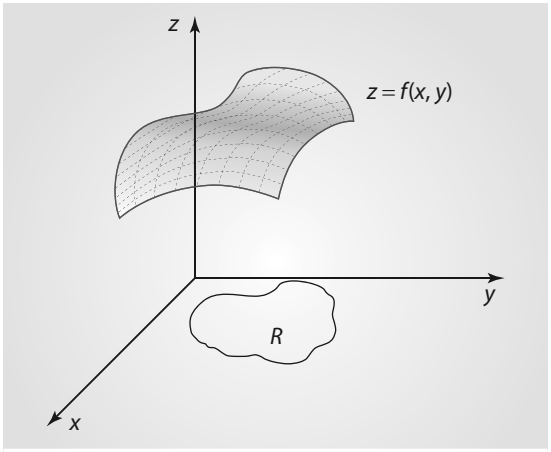


Figura 4.2

Si se procede de forma semejante a lo descrito para funciones de una variable, entonces es posible dividir el dominio en pequeños intervalos a lo largo del eje *x* y *y*, con el fin de obtener una región (o recinto) cuadriculado; en este caso es posible considerar una subdivisión de la región y generar un prisma cuya altura será la función de dos variables (véase figura 4.3).

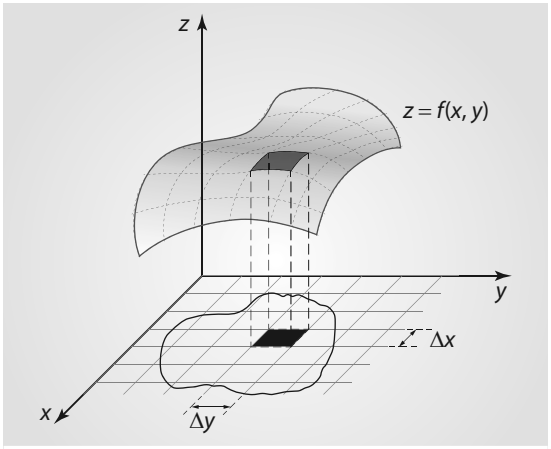


Figura 4.3

Como se puede notar, el volumen de un prisma puede hallarse al multiplicar el área de la base por la altura, esto es,

$$\Delta V = f(x,y)\,\Delta y\,\Delta x \qquad \textbf{(4.4)}$$

Si el tamaño de las subdivisiones es muy pequeño, la exactitud en el volumen del prisma se incrementa, por lo que se puede escribir:

$$dV = f(x,y)\,dy\,dx \qquad \textbf{(4.5)}$$

Por tanto, el volumen total se determina al sumar todos los volúmenes de los prismas generados, como se puede apreciar a continuación:

$$V = \iint_R f(x,y)\,dy\,dx \qquad \textbf{(4.6)}$$

La integral doble

Sea una función de dos variables, definida en la región R^2 rectangular. Dividimos esta región en subregiones como se aprecia en la figura 4.4.

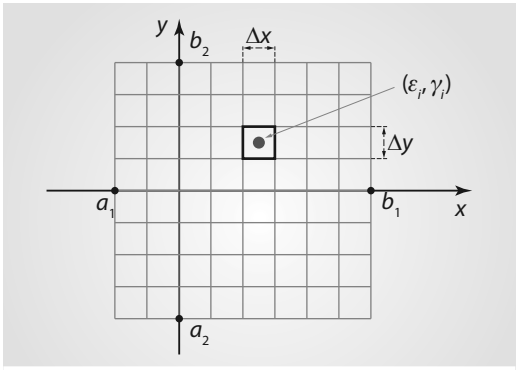


Figura 4.4

El área de la *i*-ésima región es:

$$\Delta_i A = \Delta_i x \Delta_i y \qquad \textbf{(4.7)}$$

Sean $(\varepsilon_i, \gamma_i)$ un punto arbitrario en la *i*-ésima región y $f(\varepsilon_i, \gamma_i)$ el valor de la función en ese lugar. El producto $f(\varepsilon_i, \gamma_i)\,\Delta_i A$ asociado a cada una de las *n* subregiones, representa el volumen de un prisma y su suma se escribe así:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_1, \gamma_1)\Delta_i A \qquad \textbf{(4.8)}$$

Definición 4.1

Se dice que una función *f* de dos variables es integrable en una región rectangular *R*, si *f* está definida en *R* y existe un número *L*, el cual recibe el nombre de integral doble de *f* en *R*, el cual se escribe como:

$$\lim_{\Delta_i A \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \gamma_i)\Delta_i A = \iint_R f(x,y)\,dA = L \qquad \textbf{(4.9)}$$

Teorema 4.1

Si una función *f* de dos variables es continua en una región rectangular cerrada *R*, entonces *f* es integrable en *R*. Para una región cerrada más general se procede de manera análoga.

Actividad de aprendizaje

Explica con tus propias palabras la importancia de la integral doble y anota una aplicación.

Integrales iteradas. Volumen bajo una superficie

Regiones rectangulares

Como se señaló al inicio de este capítulo, la integral doble representa el volumen bajo una superficie definida sobre una región, y como se recordará, este volumen se aproximó como la suma de los pequeños volúmenes de muchos prismas. En este apartado se muestra un enfoque alternativo para el cálculo del volumen, entendiendo que en lugar de sumar volúmenes de prismas es posible sumar volúmenes de rebanadas que conforman un sólido.

En la figura 4.5 se muestra una función $z = f(x, y)$ integrable en una región rectangular cerrada, *R*, en el plano *xy*, limitada por las rectas $x = a_1$, $x = b_1$ y $y = a_2$, $y = b_2$, suponiendo que $f(x, y) \geq 0$ para toda (x, y) en *R*. Como se observa en esta sencilla región, se pueden obtener rebanadas cuyas alturas están dadas por el valor de la función $f(x, y)$. Nótese que cada rebanada se genera a un valor de *y* constante; por tanto, en este caso, el grosor de esta partición será *dy*.

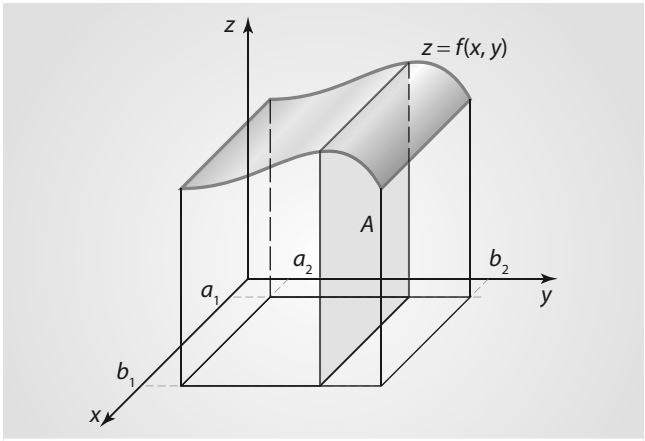


Figura 4.5

El volumen de esta partición está dado por el producto del área de esta rebanada y el grosor de la misma. El área de la rebanada se puede encontrar a partir de la definición de integral simple (véase la introducción de este capítulo). Por su parte, en la figura 4.5 puede observarse que:

$$A(y)=\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx \qquad \textbf{(4.10)}$$

Nótese que la expresión anterior es una función de *y*; es decir, depende del lugar donde se quiera conocer el valor del área de la rebanada. Por tanto, el valor de *y* permanece constante.

El volumen de la rebanada se obtiene al multiplicar el área por el grosor de la misma, de la siguiente manera:

$$dV = A(y)\,dy \qquad \textbf{(4.11)}$$

El volumen total del sólido puede obtenerse así:

$$V=\int_{a_2}^{b_2}\left[\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx\right]dy \qquad \textbf{(4.12)}$$

En este caso, la integral del lado derecho se llama **integral iterativa** o **sucesiva**. Al evaluar la integral que se encuentra en los corchetes (que representa el área de una rebanada), se debe recordar que *x* es la variable de integración y *y* se considera constante.

Regiones generales, tipo I y tipo II

Para regiones más generales, el cálculo del volumen de un sólido puede hallarse de un modo semejante al descrito en el apartado anterior. Ahora supóngase que *R* es una región en el plano *xy*, limitada por las rectas $x = a$ y $x = b$, donde $a < b$, y por las curvas $y = g_1(x)$ y $y = g_2(x)$, donde g_1 y g_2 son dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$, y además $g_1(x) \leq g_2(x)$ (véase la figura 4.6).

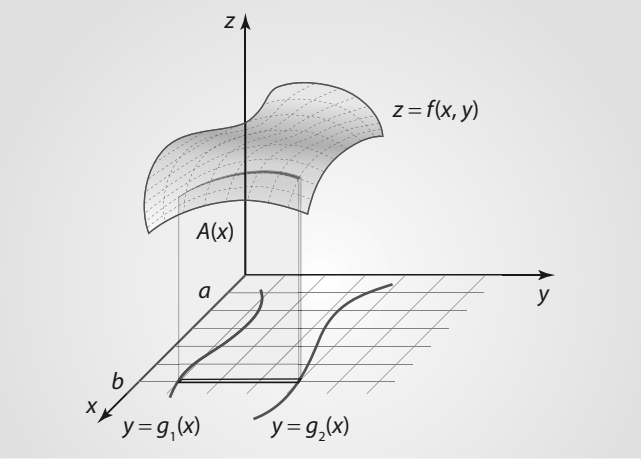


Figura 4.6

Como se puede notar en la figura anterior, en este caso la región es más general; la rebanada tiene un grosor *dx* y su área se puede obtener de la siguiente forma:

$$A(y)=\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \qquad \textbf{(4.13)}$$

Nótese que los límites de integración ahora son funciones, puesto que la región de integración es más general, y que el área calculada es una función de x, pues en este proceso de integración la rebanada se generó a lo largo de un plano $x = constante$.

El volumen de la rebanada se obtiene al multiplicar su área por el grosor de la misma, de la siguiente manera:

$$dV = A(y)\,dx \tag{4.14}$$

El volumen total del sólido puede obtenerse así:

$$V = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx \tag{4.15}$$

Como se observa, existen dos formas de partir rebanadas para el cálculo de integrales dobles:

a) Considerando particiones a x constante y luego sumando los volúmenes en la dirección x:

$$V = \iint f(x,y)\,dy\,dx \tag{4.16}$$

b) Considerando particiones a y constante y luego sumando los volúmenes en la dirección y:

$$V = \iint f(x,y)\,dx\,dy \tag{4.17}$$

Lo anterior lleva a la pregunta: ¿cuál de las dos formas es la más sencilla de calcular un volumen?, la respuesta a esta interrogante no es tan simple, pues aunque las dos formas de partir rebanadas proporcionan el mismo resultado, es muy probable que el proceso de integración sea distinto si se integra en orden $dydx$, o bien $dxdy$, lo que significa que quizá sea necesario utilizar alguna técnica de integración (por partes, sustitución trigonométrica, sustituciones diversas, fracciones parciales, etc.) o que la integral planteada sea imposible de resolver (es decir, que no tenga una función primitiva).

Regiones de tipo I y II

En el cálculo del volumen de la figura 4.6, la región quedó determinada por funciones de x y por las rectas $x = a$ y $x = b$. A esta región se le conoce como tipo I y se representa como se ve en la figura 4.7.

$$R:\ a \le x \le b \qquad g_1(x) \le y \le g_2(x) \tag{4.18}$$

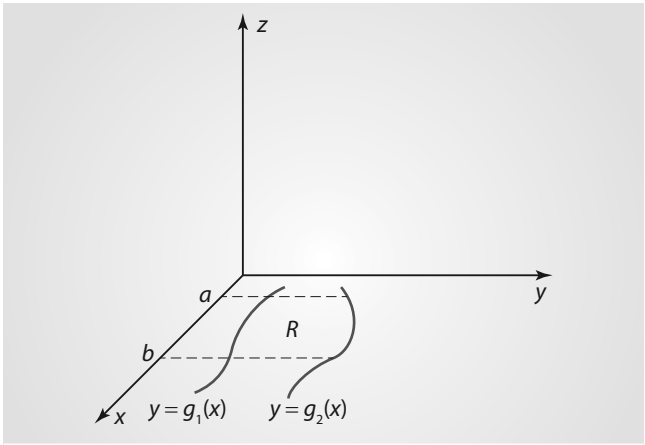


Figura 4.7

Si una función es continua, la integral doble asociada en una región de tipo I es:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx \qquad \textbf{(4.19)}$$

En forma semejante, si una región está limitada por funciones de y y por las rectas $y = c$ y $y = d$, se le conoce como región tipo II y se representa como se ilustra en la figura 4.8.

$$R: c \le y \le d \qquad h_1(y) \le x \le h_2(y) \qquad \textbf{(4.20)}$$

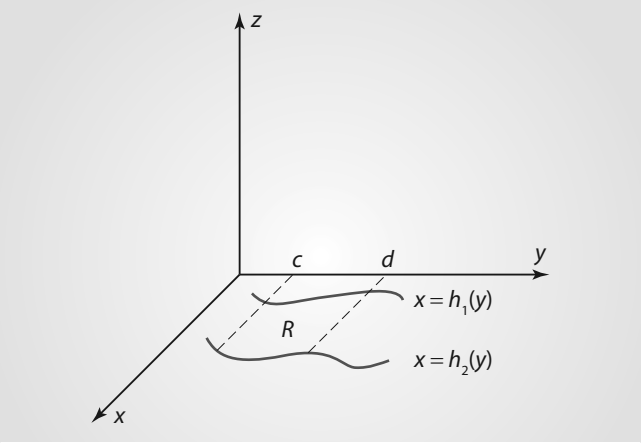


Figura 4.8

Si una función es continua en una región de tipo II, la integral doble asociada es:

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right] dy \qquad \textbf{(4.21)}$$

Teorema 4.2

Sea una función de dos variables continuas en una región cerrada R en el plano xy, y $f(x, y) \ge 0$ para todo (x, y) en R. Si V es la medida del volumen del sólido S, que tiene a la región R como base y una altura de medida $f(x, y)$ en el punto (x, y) en R, entonces:

$$V = \lim_{\|\Delta_i A\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i, \gamma_i)\Delta_i A = \iint_R f(x, y)\,dA \qquad \textbf{(4.22)}$$

Teorema 4.3

a) Si c es una constante y la función f es integrable en una región cerrada R, entonces cf es integrable en R y,

$$\iint_R cf(x, y)dA = c\iint_R f(x, y)\,dA \qquad \textbf{(4.23)}$$

b) Si las funciones f y g son integrables en una región cerrada R, entonces la función $(f + g)$ es integrable en R y,

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA + \iint_R g(x, y)\, dA \qquad \textbf{(4.24)}$$

c) Si las funciones f y g son integrables en la región cerrada R y $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todo (x, y) en R, entonces:

$$\iint_R f(x, y)\, dA \geq \iint_R g(x, y)\, dA \qquad \textbf{(4.25)}$$

d) Supóngase que la función f es continua en la región cerrada R y que R está compuesta por las subregiones R_1 y R_2, las cuales no tienen puntos comunes, excepto algunos puntos en parte de sus fronteras, entonces,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA \qquad \textbf{(4.26)}$$

4.2 La integral triple

Después de haber definido la integral doble para funciones de dos variables, es de esperarse que para una función de tres variables de la forma $W = f(x, y, z)$, la integral triple pueda quedar definida en una región R^3; sin embargo la interpretación geométrica debe cambiar, pues si la integral doble permite calcular el volumen de un sólido limitado por una superficie y una región en R^2, la integral triple carece de sentido geométrico (correspondería a un volumen de cuatro dimensiones). No obstante, es una herramienta muy poderosa para el cálculo de propiedades físicas y geométricas de los cuerpos (tales como masa, momentos de inercia de áreas, momentos de inercia de masas, centroides, etc.).

Integral triple. Definición

La extensión del concepto de integral doble a integral triple es análoga a la ampliación de la integral simple a la doble. En este caso es posible dividir el dominio de la función de tres variables en pequeños incrementos; el tipo más simple de región de R^3 es un paralelepípedo rectangular acotado por seis planos: $x = a_1$, $x = a_2$, $y = b_1$, $y = b_2$, $z = c_1$, $z = c_2$, con $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, $c_1 < c_2$ (véase figura 4.9).

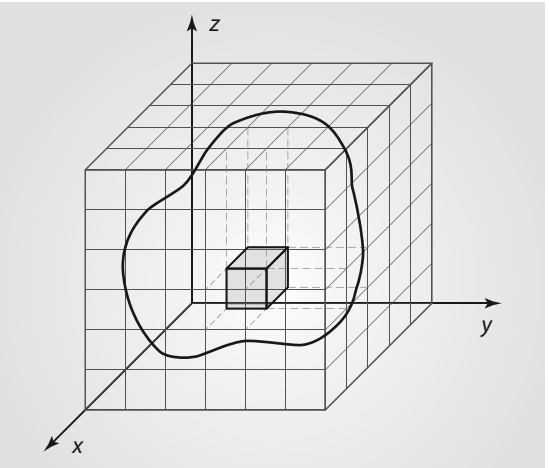


Figura 4.9

Definición 4.2

Sea $f(x, y, z)$ una función de tres variables y supóngase que f es continua en una región R^3. $\Delta_i V$ representa el volumen de la i-ésima porción rectangular para algún punto arbitrario $(\varepsilon_i, \gamma_i, \mu_i)$ en la i-ésima caja. Al tender la suma $\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i, \gamma_i, \mu_1)\Delta_i V$ a un límite cuando $|\Delta_i V| \to 0$ para cualquier selección de puntos $(\varepsilon_i, \gamma_i, \mu_i)$, entonces este límite de $f(x, y, z)$ se llama **integral triple**. Lo anterior puede escribirse así:

$$\lim_{|\Delta_i V|\to 0} \sum_{j=1}^{n} f(\varepsilon_j, \gamma_j, \mu_j)\Delta_j V = \iiint_S f(x, y, z)\, dV \qquad \textbf{(4.27)}$$

Evaluación de integrales triples mediante integrales iteradas

Como se vio en el caso de las integrales dobles, la integración se debe realizar en forma iterada, por lo que en este caso el proceso es semejante, es decir, como una integral doble de una integral parcial.

Si la región D en R^3 está limitada por arriba por las superficies $z = f_2(x, y)$ y por debajo por $z = f_1(x, y)$, la integral triple se escribe:

$$\iiint_D F(x, y, z)\, dV = \iint_R \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x, y, z)\, dz \right] dA \qquad \textbf{(4.28)}$$

Notas importantes

1. Como se mencionó antes, la integral triple en la forma:

$$\iiint f(x, y, z)\, dV = \iiint f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx \qquad \textbf{(4.29)}$$

   no corresponde al volumen de un sólido; sin embargo cuando $f(x, y, z) = 1$, la integral triple anterior proporciona el volumen de un cuerpo.

2. Como se vio en la integración triple, aparecen tres diferenciales, *dzdydx*, lo que implica que existen seis posibles formas de integración:

dzdydx	*dydzdx*	*dxdydz*
dzdxdy	*dydxdz*	*dxdzdy*

   Elegir alguna de las seis formas anteriores depende de la región de integración, pues en ocasiones la forma del sólido determina cuál diferencial debe ir primero.

4.3 Integrales múltiples en otros sistemas de coordenadas

Coordenadas polares

Hasta ahora, se ha trabajado en un sistema de coordenadas rectangulares para especificar un punto P en el plano. Lo único que se requiere es especificar las coordenadas de $P(x, y)$, como se observa en la figura 4.10.

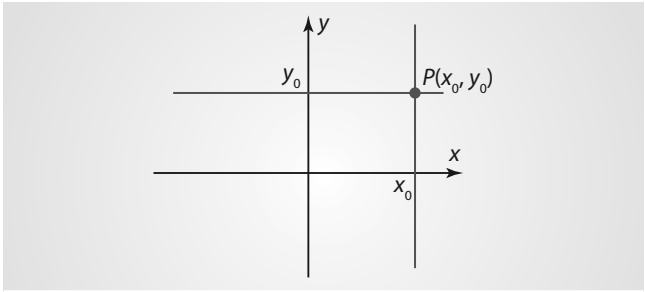


Figura 4.10

Existe una forma alterna de ubicar el mismo punto, pero con otra pareja de coordenadas, las cuales requieren de una distancia radial y un ángulo (en radianes). Las coordenadas de este punto son $P(r, \theta)$.

A este sistema de coordenadas se le conoce como coordenadas polares (véase figura 4.11).

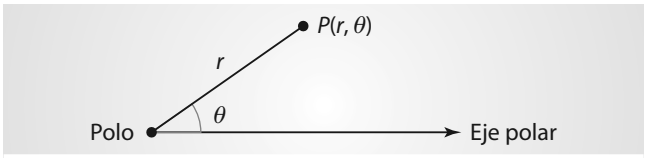


Figura 4.11

Para poder encontrar una relación entre ambos sistemas de coordenadas, considérense las figuras 4.10 y 4.11 superpuestas, lo que permite hallar las siguientes ecuaciones de transformación de coordenadas (véase figura 4.12).

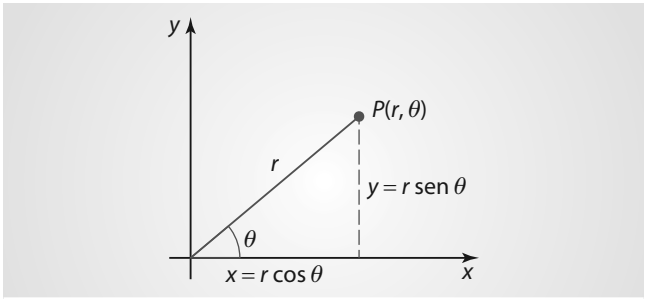


Figura 4.12

A partir del triángulo rectángulo que se forma, dada la coordenada polar $P(r, \theta)$ en el sistema cartesiano se tiene:

$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \operatorname{sen} \theta \qquad \textbf{(4.30)}$$

De forma similar, para un punto en coordenadas rectangulares $P(x, y)$, en el sistema polar se tiene:

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\tan \theta = \frac{y}{x} \qquad \textbf{(4.31)}$$

Nota: Por convención, los ángulos $\theta > 0$ se miden en sentido opuesto al de las manecillas del reloj, a partir del eje positivo.

Ejemplo 4.1

Localizar en el plano los siguientes puntos dados en coordenadas polares:

a) $\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$

b) $\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$

Solución

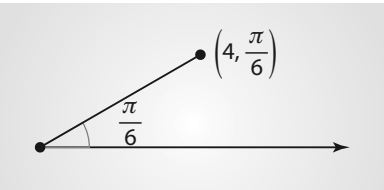


Figura 4.13

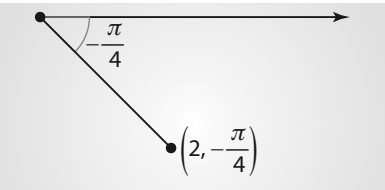


Figura 4.14

Con toda seguridad, el lector debe estarse preguntando: ¿para qué un nuevo sistema de coordenadas, si con las coordenadas cartesianas es posible representar cualquier función o relación? La respuesta es sencilla: cuando se realiza la conversión de una ecuación cartesiana que contenga términos de la forma $(x^2 + y^2)$ en coordenadas polares, se simplifica la estructura de la ecuación y facilita su manejo.

Ejemplo 4.2

Determinar una ecuación polar que tenga la misma gráfica que el círculo $x^2 + y^2 = 2y$.

Solución

Partiendo de $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, y sustituyendo en la ecuación cartesiana,

$$r^2\cos^2\theta + r^2\,\text{sen}^2\,\theta = 2r\,\text{sen}\,\theta$$

$$r^2 = 2r\,\text{sen}\,\theta$$

se obtiene:

$$r = 2\,\text{sen}\,\theta$$

Gráficas de ecuaciones polares

La gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ es el conjunto de puntos P con al menos un par de coordenadas que satisfacen la ecuación.

Ejemplo 4.3

Hallar la gráfica de:

$$r = \theta$$

Solución

Cuando $\theta \geq 0$ aumenta, r también aumenta y los puntos (r, θ) van dando vueltas alrededor del origen (véase figura 4.15).

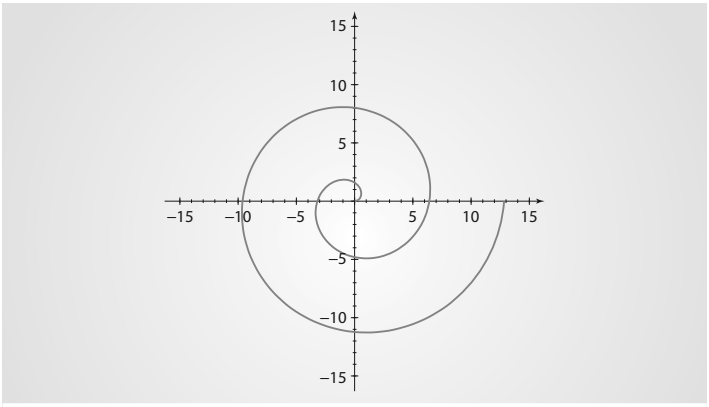


Figura 4.15

Ejemplo 4.4

Hallar la gráfica de:

$$r = 3 - 3 \operatorname{sen} \theta$$

Solución

Una tabulación como la siguiente permite ubicar algunos puntos (véase figura 4.16).

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
r	3	$\frac{2}{3}$	0.4	0	0.4	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{9}{2}$	5.6	6

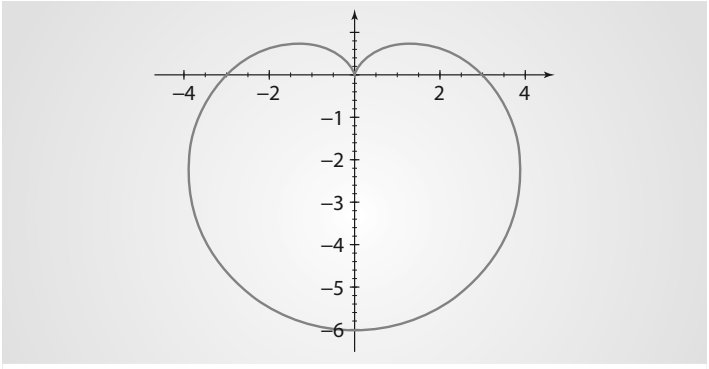


Figura 4.16

Existen formatos establecidos para las gráficas de algunas ecuaciones polares que facilitan su construcción. A continuación se resumen algunos de los más importantes.

Cardiodes y limazones (caracoles)

La gráfica de cualquier ecuación polar de la forma:

$$r = a \pm a \operatorname{sen} \theta$$

o bien de la forma:

$$r = a \pm a \cos \theta$$

se llama **cardioide** (por la semejanza con un corazón), como se observa en la figura 4.16.

Los cardioides son casos especiales de otras curvas polares conocidas como **limazones** o **caracoles**, los cuales pueden representarse en la forma:

$$r = a \pm b \operatorname{sen} \theta$$

o bien en la forma:

$$r = a \pm b \cos \theta$$

a) Cuando $|a|>|b|$ un limazón es semejante a un cardioide, pero no pasa por el origen.

b) Cuando $|b|>|a|$ un caracol tiene un rizo interior.

Rosas y circunferencias

En general si n es un entero positivo, las gráficas de:

$$r = a \operatorname{sen} n\theta$$

o bien:

$$r = a \cos n\theta \qquad\qquad n \geq 2$$

se llaman **rosas**.

a) Si n es impar, el número de ramas o pétalos es n.

b) Si n es par, hay $2n$ pétalos.

1. $r = \operatorname{sen} 2\theta$; en este caso se concluye que hay cuatro pétalos con longitud l, distribuidos como se ve en la figura 4.17.

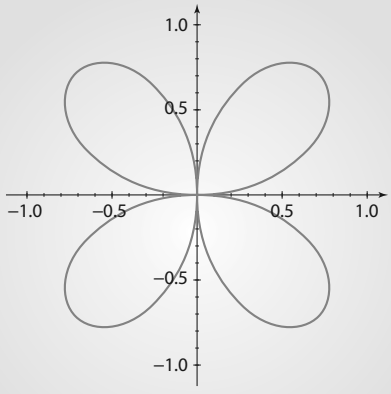


Figura 4.17

2. $r = \cos 2\theta$; en este caso se concluye que hay cuatro pétalos con longitud l, distribuidos como se aprecia en la figura 4.18.

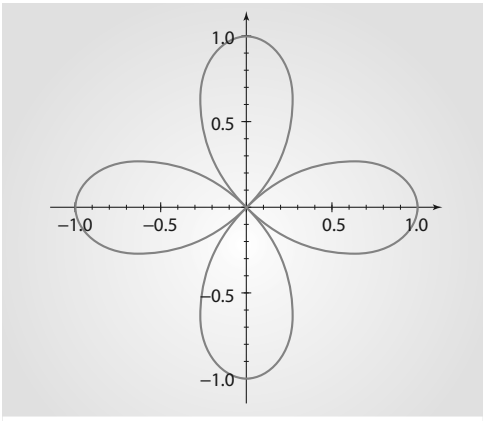


Figura 4.18

3. $r = \text{sen } 3\theta$; en este caso se concluye que hay tres pétalos con longitud l, distribuidos como se muestra en la figura 4.19.

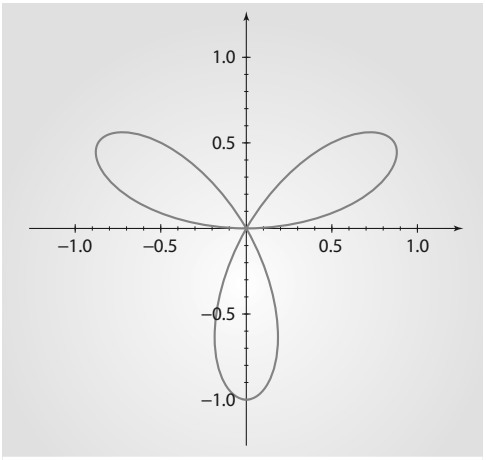


Figura 4.19

4. $r = \cos 3\theta$; en este caso se concluye que hay tres pétalos con longitud l, distribuidos como se aprecia en la figura 4.20.

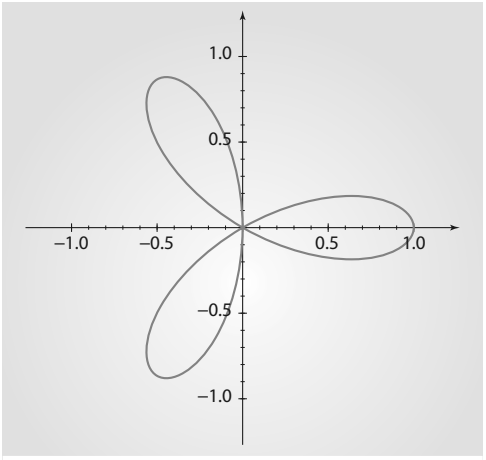


Figura 4.20

Caso especial

Para $n = 1$,

$$r = a \operatorname{sen} \theta$$

o bien:

$$r = a \cos \theta$$

Éstas son circunferencias que pasan por el origen con diámetro $|a|$ y centros en el eje y y el eje x, respectivamente.

Circunferencias

a) $r = \operatorname{sen} \theta$

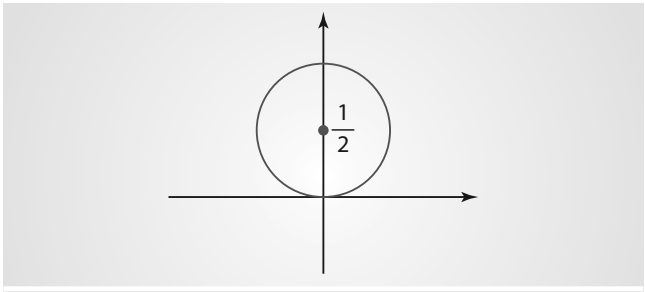


Figura 4.21

b) $r = \cos \theta$

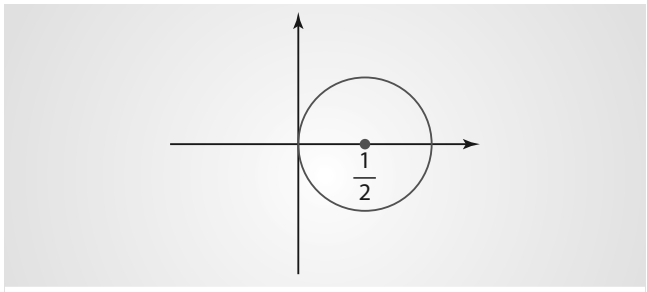


Figura 4.22

La integral doble en coordenadas polares

Después de tratar las coordenadas polares, sus ecuaciones de transformación y las gráficas típicas, es conveniente definir la integral doble en este sistema. Recuérdese que el volumen del sólido limitado por la superficie de la forma $z = f(x, y)$ y una región R en el plano xy, en donde $f(x, y)$ es continua (véase figura 4.23), se puede escribir:

$$V = \iint f(x,y)\, dy\, dx \qquad \textbf{(4.32)}$$

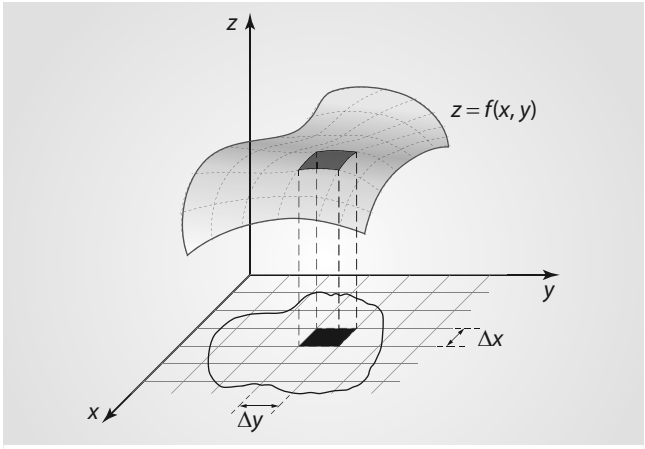


Figura 4.23

Sin embargo, si se desea hallar el mismo volumen en coordenadas polares, es indispensable realizar particiones del dominio de integración utilizando radios y círculos concéntricos en un papel de tipo polar (véase figura 4.24).

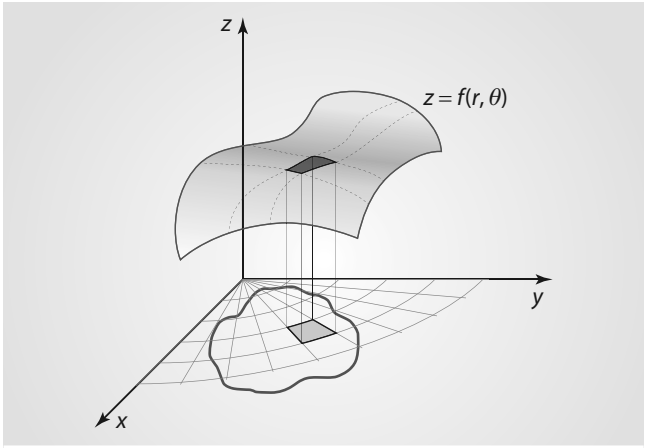


Figura 4.24

En este caso, la función $z = f(x, y)$ debe estar en coordenadas polares tales que $z = f(r, \theta)$. Por tanto, el cálculo del volumen puede hallarse del producto de la altura de un prisma cuya base es una porción circular, la cual tendrá la forma de un rectángulo si sus dimensiones son lo suficientemente pequeñas. Para comprender mejor lo anterior, en la figura 4.25 se realiza un análisis del área de una porción circular.

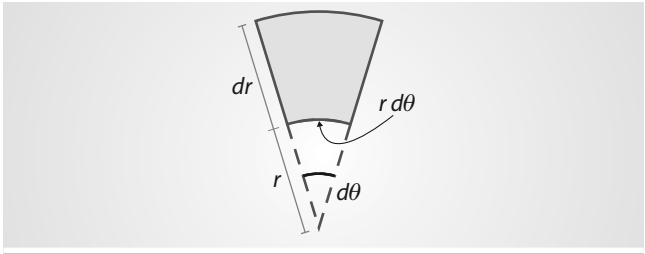


Figura 4.25

Por tanto, el área de la sección circular diferencial en coordenadas polares está dado por:

$$dA = r\,dr\,d\theta \qquad \textbf{(4.33)}$$

Así, el volumen limitado entre la superficie dada y la región R en el plano es:

$$V = \iint f(r,\theta) r\,dr\,d\theta \qquad \textbf{(4.34)}$$

En forma análoga, el área de una superficie en coordenadas polares se escribe:

$$A = \iint r\,dr\,d\theta \qquad \textbf{(4.35)}$$

Ejemplo 4.5

Determinar el área de la región limitada por $r = 2\,\text{sen}\,\theta$.

Solución

De las gráficas de las ecuaciones polares, se nota que es una circunferencia con orientación vertical (véase figura 4.26).

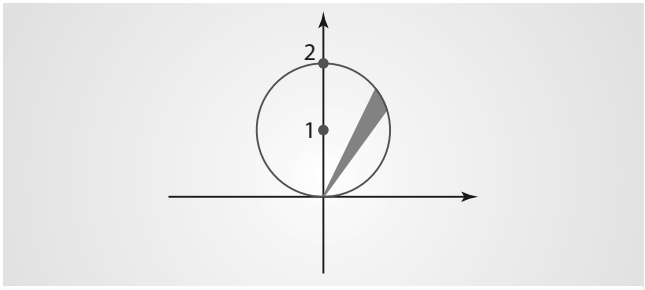


Figura 4.26

Dado que hay simetría en la región, el área se puede calcular para una porción y posteriormente multiplicarla por 2 para tener el área completa, como se observa a continuación.

$$A = \iint_R r\,dr\,d\theta$$

$$A = 2\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{2\,\text{sen}\,\theta} r\,dr\right] d\theta$$

$$A = 2\int_0^{\pi/2} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{2\,\text{sen}\,\theta}\, d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi/2} 4\,\text{sen}^2\,\theta\,d\theta = 4\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2\theta\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \left(2\theta - \text{sen}\,2\theta\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \pi$$

Ejemplo 4.6

Determinar el área de la región limitada por la ecuación polar

$$r = 3 + 2\operatorname{sen}\theta$$

Solución

El gráfico de esta ecuación polar corresponde a un cardioide con orientación vertical (véase figura 4.27).

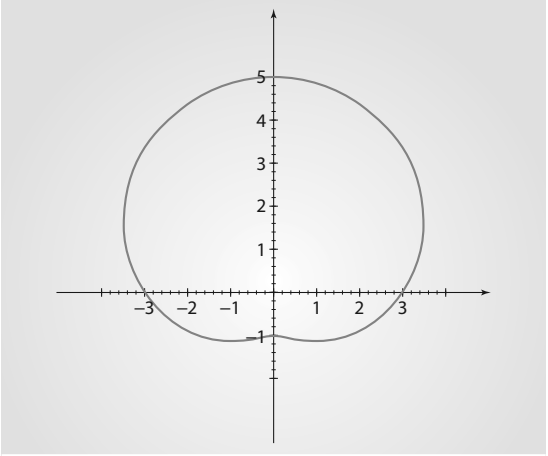


Figura 4.27

En forma semejante al caso anterior, la simetría permite hallar el área de la mitad de la superficie y luego duplicarla, como se ve a continuación:

$$A = 2\int_{\pi/2}^{3/2}\left[\int_0^{3+2\operatorname{sen}\theta} r\,dr\right]d\theta$$

$$A = \int_{\pi/2}^{3\pi/2\pi} r^2\Big|_0^{3+2\operatorname{sen}\theta}\,d\theta$$

$$A = \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left(3+2\operatorname{sen}\theta\right)^2 d\theta = \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left(9+12\operatorname{sen}\theta+4\operatorname{sen}^2\theta\right)^2 d\theta$$

$$= 9\int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta + 12\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\operatorname{sen}\theta\,d\theta + 4\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta$$

$$= 9\theta\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} + \left(-12\cos\theta\right)_{\pi/2}^{3\pi/2} + 4\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta\right)_{\pi/2}^{3\pi/2}$$

$$= 9\pi + 3\pi - \pi = 11\pi$$

Ejemplo 4.7

Determinar el área de la región limitada por el cardioide:

$$r = 4 + 4\cos\theta$$

Solución

Como en los casos anteriores, aquí también es posible aprovechar la simetría, como se ve en la figura 4.28.

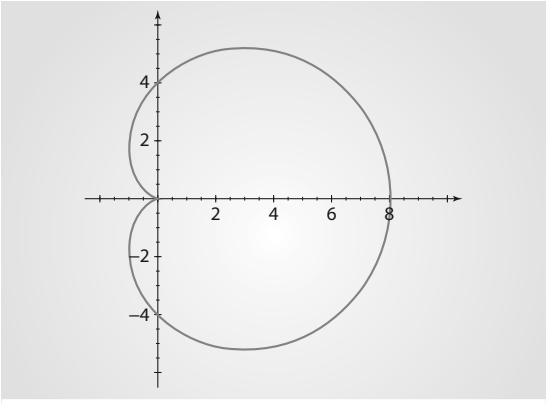


Figura 4.28

$$A = \iint_R r\, dr\, d\theta$$

a
$$A = 2\int_0^{\pi}\left[\int_0^{(4+4\cos\theta)} r\, dr\right] d\theta$$

$$A = 2\int_0^{\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{(4+4\cos\theta)} d\theta = \int_0^{\pi} (4+4\cos\theta)^2\, d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi} \left(16+32\cos\theta+16\cos^2\theta\right) d\theta = 16\int_0^{\pi} d\theta + 32\int_0^{\pi} \cos\theta\, d\theta + 16\int_0^{\pi} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 16\theta\Big|_0^{\pi} + 32\,\text{sen}\,\theta\Big|_0^{\pi} + 16\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2\theta\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= 16\pi + 8\pi$$

$$= 24\pi u^2$$

Coordenadas cilíndricas

Al igual que ocurre con las coordenadas polares, también pueden definirse sistemas de coordenadas en tres dimensiones que pueden usarse de forma parecida para las ecuaciones en x, y, z, cuya principal aplicación es simplificar integrales múltiples.

El sistema de coordenadas polares se puede generalizar a tres dimensiones, para lo cual basta con representar un punto P por una terna ordenada (r, θ, z), donde z (la altura) es la tercera coordenada rectangular de P(véase figura 4.29).

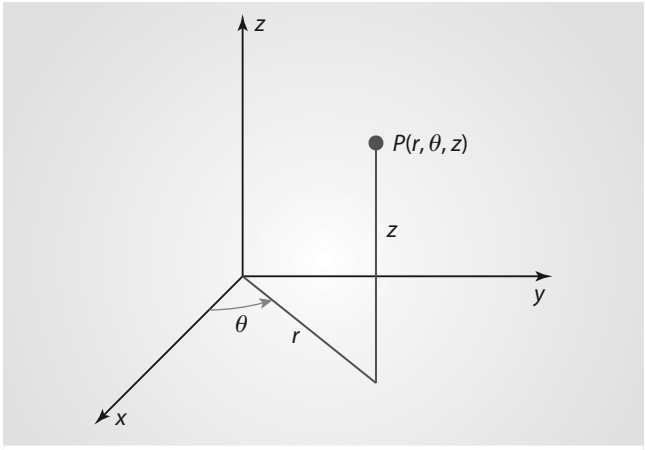


Figura 4.29

Nótese que las coordenadas cilíndricas y las polares tienen gran semejanza; por tanto, las ecuaciones de transformación pueden escribirse:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$
$$z = z \qquad \textbf{(4.36)}$$

Asimismo,

$$r^2 = x^2 + y^2$$

La integral triple en coordenadas cilíndricas

Como se recordará, la integral triple en coordenadas cartesianas puede escribirse:

$$\iiint f(x,y,z)\,dV = \iiint f(x,y,x)\,dz\,dy\,dx \qquad \textbf{(4.37)}$$

Ahora solo es necesario realizar las transformaciones correspondientes, y no perder de vista que el elemento diferencial de volumen tiene la misma expresión del área encontrada en coordenadas polares, multiplicada por la altura del elemento *dz*, lo que puede escribirse:

$$\iiint f(r,\theta,z)\,dV = \iiint f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta \qquad \textbf{(4.38)}$$

Coordenadas esféricas

Otro tipo de coordenadas útiles en las transformaciones son las coordenadas esféricas. En la figura 4.30, se muestra un punto en el espacio con su correspondiente ubicación en este nuevo sistema de coordenadas. En este caso, solo es necesario contar con una distancia medida desde el origen al punto considerado y dos ángulos: uno medido en el plano *xy* y otro en un plano vertical perpendicular al plano *xy*.

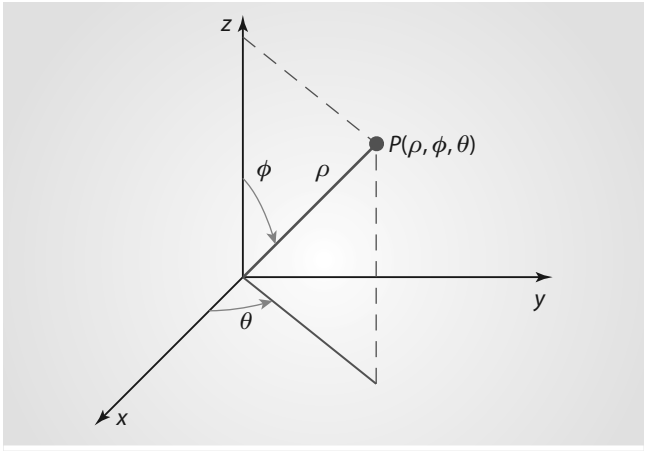


Figura 4.30

Las ecuaciones de transformación se pueden encontrar a partir de los triángulos rectángulos que se ilustran en la figura 4.30. Lo anterior se puede escribir:

$$\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y &= \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z &= \rho \cos\varphi \end{aligned} \qquad \textbf{(4.39)}$$

Así mismo se puede escribir: $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$

La integral triple en coordenadas esféricas

Recuérdese que la integral triple en coordenadas cartesianas puede escribirse

$$\iiint f(x,y,z)\,dV = \iiint f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx \qquad \textbf{(4.40)}$$

Para definir la integral triple en coordenadas esféricas se requiere definir el elemento diferencial de volumen, que en este caso corresponde a una porción esférica de diminutas dimensiones. En la figura 4.31 se muestra el elemento diferencial de volumen con las dimensiones correspondientes.

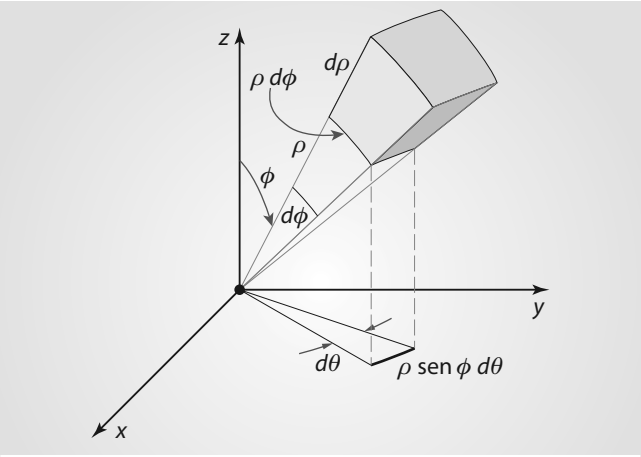


Figura 4.31

Cuando las dimensiones del elemento son infinitamente pequeñas, es posible considerar a este elemento de volumen como un cubo, cuyo volumen se obtiene al multiplicar las longitudes de sus lados de la siguiente manera:

$$dV = \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \qquad \textbf{(4.41)}$$

Por tanto, la integral triple puede escribirse de la siguiente forma, usando las transformaciones correspondientes:

$$\iiint f(\rho,\phi,\theta)\,dV = \iiint f(\rho,\phi,\theta)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \qquad \textbf{(4.42)}$$

4.4 Aplicaciones

Es importante destacar que en la actualidad existen muchas aplicaciones de las integrales múltiples en diversos campos de la ingeniería; por ello, en esta sección se definen algunas propiedades físicas y geomé-

tricas de los cuerpos, que se obtienen a partir de una integral doble o triple. Asimismo, es importante notar que estas propiedades son de mucha importancia en los cursos de dinámica, estática y mecánica de materiales.

Masa y centro de masas

El centro de masa de un cuerpo es el punto en donde se considera que está concentrado todo su peso; si un cuerpo es homogéneo, el centro de masa se localiza en su centro geométrico, pero cuando un cuerpo es no homogéneo es necesario hacer algunas consideraciones.

Supóngase que se tiene una lámina en forma de una región cerrada R, en el plano xy. Sea $\rho(x, y)$ una función continua en R; esta función representa la densidad superficial de la lámina en cualquier punto (x, y).

Sea una partición $\Delta_i A$ de R en η rectángulos. Si $(\varepsilon_i, \gamma_i)$ es cualquier punto en el i-ésimo rectángulo que tiene un área $\Delta_i A$, entonces una aproximación de la masa del i-ésimo rectángulo es $\rho(\varepsilon_i, \gamma_i)\ \Delta_i A$ y la masa total es:

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(\varepsilon_i, \gamma_i)\, \Delta_i A \qquad \textbf{(4.43)}$$

Tomando el límite de la suma anterior cuando la norma de $\Delta_i A$ tiende a cero, la medida M de la masa de la lámina se expresa por:

$$M = \lim_{|\Delta_i A| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\varepsilon_i, \gamma_i) \Delta_i A = \iint_R \rho(x, y)\, dA \qquad \textbf{(4.44)}$$

La expresión anterior permite calcular la masa de una placa irregular con densidad superficial variable, para lo cual solo es necesario conocer la forma de la placa y la variación de la densidad superficial.

Procediendo en forma similar, si el cuerpo es tridimensional, la densidad debe ser una función de la forma $\rho(x, y, z)$ es decir, una densidad volumétrica. Así, la masa del sólido se puede hallar de la siguiente manera:

$$M = \iiint_D \rho(x, y, z)\, dV \qquad \textbf{(4.45)}$$

Para encontrar el centro de masa es necesario definir una propiedad física de los cuerpos conocida como **momento de masa**, que puede interpretarse como la capacidad de un cuerpo de girar respecto de un eje coordenado. El momento de masa del i-ésimo rectángulo con respecto al eje x se calcula de manera aproximada por medio de $\gamma_i \rho(\varepsilon_i, \gamma_i) \Delta_i A$; la suma de los momentos de masa de los R rectángulos respecto al eje x es:

$$M_x = \lim_{|\Delta_i A| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \rho(\varepsilon_i, \gamma_i) \Delta_i A = \iint_R y \rho(x, y)\, dA \qquad \textbf{(4.46)}$$

Análogamente, el momento de masa respecto a y, M_y es:

$$M_y = \lim_{|\Delta_i A| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \rho(\varepsilon_i, \gamma_i) \Delta_i A = \iint_R x \rho(x, y)\, dA \qquad \textbf{(4.47)}$$

Al igualar los momentos de masa (capacidad de giro) respecto a los ejes x y y con el momento de la masa total, considerando que la masa total se encuentra concentrada en un punto llamado centro de masa, se puede obtener:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \qquad \textbf{(4.48)}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} \qquad \textbf{(4.49)}$$

donde $\bar{x}$ y $\bar{y}$ representan las coordenadas del centro de masa de la placa.

Para cuerpos tridimensionales, los momentos de masa son:

$$M_{xy} = \iiint_D z\rho(x, y, z)\, dV \qquad \textbf{(4.50)}$$

$$M_{xz} = \iiint_D y\rho(x, y, z)\, dV \qquad \textbf{(4.51)}$$

$$M_{yz} = \iiint_D x\rho(x, y, z)\, dV \qquad \textbf{(4.52)}$$

Las coordenadas del centro de masa están dadas por:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} \qquad \textbf{(4.53)}$$

Momentos de inercia

El momento de inercia es una propiedad física de los cuerpos que mide la resistencia a girar respecto a un eje, la cual depende de la masa y la forma del cuerpo. En la dinámica de cuerpos rígidos, esta propiedad es muy importante cuando un cuerpo se encuentra en movimiento rotacional.

El momento de inercia (o momento cuadrático de masa) de una partícula cuya masa es m kg con respecto a un eje se define como mr^2 (en kgm^2), donde r metros es la distancia perpendicular de la partícula al eje.

Para un sistema de n partículas, el momento de inercia del sistema se define como la suma de los momentos de inercia de todas las partículas; esto es, si la i-ésima partícula tiene una masa de m_i kg, el momento de inercia del sistema es:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad \textbf{(4.54)}$$

Supóngase que para un cuerpo rígido (formado por un número infinito de partículas) se tiene una distribución continua de masa que ocupa una región R en xy, si la densidad de área de esta distribución es $\rho(x, y)$, donde ρ es continua en R, entonces el momento de inercia I_x respecto al eje x se define como:

$$I_x = \lim_{\|\Delta_i A\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \rho(\varepsilon_i, \gamma_i) \Delta_i A$$

$$= \iint_R y^2 \rho(x, y)\, dA \qquad \textbf{(4.55)}$$

En forma semejante, el momento de inercia I_y respecto al eje y, se define como:

$$I_y = \lim_{\|\Delta_i A\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \rho(\varepsilon_i, \gamma_i) \Delta_i A$$

$$= \iint_R x^2 \rho(x, y)\, dA \qquad \textbf{(4.56)}$$

y el momento de inercia respecto al eje z que pasa por el origen es:

$$I_0 = \lim_{|\Delta_i A|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(\varepsilon_i^2 + \gamma_i^2\right) \rho(\varepsilon_i, \gamma_i) \Delta_i A = \iint_R \left(x^2 + y^2\right) \rho(x, y)\, dA \qquad \textbf{(4.57)}$$

donde I_0 es lo que se denomina momento polar de inercia.

Para cuerpos tridimensionales, los momentos de inercia se pueden hallar de la siguiente manera:

$$I_x = \iiint_D \left(y^2 + z^2\right) \rho(x, y, z)\, dV \qquad \textbf{(4.58)}$$

$$I_y = \iiint_D \left(x^2 + z^2\right) \rho(x, y, z)\, dV \qquad \textbf{(4.59)}$$

$$I_z = \iiint_D \left(x^2 + y^2\right) \rho(x, y, z)\, dV \qquad \textbf{(4.60)}$$

Radio de giro

Si I es el momento de inercia respecto a un eje L de una distribución de masa en el plano y M es la masa total de la distribución, entonces el radio de giro de la distribución con respecto a L es una distancia r, la cual se define así:

$$r^2 = \frac{I}{M} \qquad \textbf{(4.61)}$$

El radio de giro representa una distancia hipotética respecto de la cual una partícula puede rotar con un momento de inercia igual al de un cuerpo rígido. Esta propiedad se usa cuando no se conoce por completo el momento de inercia de un cuerpo.

Problemas para resolver

4.1 Evaluar la integral doble:

$$\iint_R x^3 y^2 \, dA$$

en la región limitada por $y = x, \quad y = 0, x = 1$.

4.2 Evaluar la integral doble $\iint_R (2x + 4y + 1) \, dA$ limitada por la región comprendida entre las curvas: $y = x^2$ y $y = x^3$.

4.3 Evaluar la integral doble $\iint_R 2xy \, dA$ limitada por la región $y = x^3, y = 8, x = 0$.

4.4 Aplicar una integral doble para determinar el área de la región R, limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = -x$ y $y = 2x - x^2$.

4.5 Aplicar una integral doble para determinar el área de la región R, limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = -2x + 3, y = x^3$ y $x = -2$.

4.6 Determinar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones $2x + y + z = 6, x = 0, y = 0$ y $z = 0$.

4.7 Determinar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones $x^2 + y^2 = 4, x - y + 2z = 4, x = 0$ y $z = 0$ en el primer octante.

4.8 Determinar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las siguientes ecuaciones:

$z = 1 + x^2 + y^2$

$3x + y = 3$

$x = 0$

$y = 0$

$z = 0$

4.9 Hallar el volumen de sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones:

$yz = 6$

$x = 0$

$x = 5$

$y = 1$

$y = 6$

$z = 0$

4.10 Encontrar el volumen del sólido limitado por las ecuaciones:

$$z = 4 - y^2$$
$$x^2 + y^2 = 2x$$
$$z = 0$$

4.11 Calcular el volumen del sólido contenido en el primer octante, limitado por las gráficas de las siguientes ecuaciones:

$$x^2 + z^2 = 9$$
$$y = 2x$$
$$y = 0$$
$$z = 0$$

4.12 Encontrar el volumen del sólido limitado por las siguientes ecuaciones:

$$z = x^3$$
$$x = 4y^2$$
$$16y = x^2$$
$$z = 0$$

4.13 Calcular el volumen del sólido limitado por las gráficas de las siguientes ecuaciones:

$$z = x^2 + 4$$
$$y = 4 - x^2$$
$$x + y = 2$$
$$z = 0$$

4.14 Calcular el volumen del sólido contenido en el primer octante y acotado por:

$$z = x^2 + y^2$$
$$y = 4 - x^2$$

4.15 Calcular el volumen del sólido bajo el plano $z = 4x$ y que está arriba de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ en el plano xy.

Nota: Considerar sólo el primer octante.

4.16 Calcular el volumen del cuerpo limitado por el cilindro circular de radio a, cuyo eje de simetría coincide con el eje z, los planos coordenados (primer octante) y el plano $\frac{x}{a} + \frac{z}{a} = 1$.

4.17 Usar una integral triple para calcular el volumen de la intersección de las superficies dadas:

$$z = x^2$$
$$z = x^3$$
$$y = z^2$$

4.18 Hallar el volumen del sólido limitado por las ecuaciones dadas. Usar una integral triple.

$y^2 + z^2 = 1$

$x + y + z = 2$

$x = 0$

4.19 Determinar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las siguientes ecuaciones:

$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, z = 0$

$x^2 + y^2 = 1$

$x^2 + y^2 = 9$

4.20 Calcular el volumen del sólido que se encuentra arriba del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4.21 Calcular el volumen del sólido que se encuentra arriba del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

4.22 Encontrar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones indicadas en el primer octante.

$z^2 = 3x^2 + 3y^2$

$x = 0$

$y = 0$

$z = 2$

4.23 Calcular el volumen de la región acotada arriba por la esfera $\rho = a$ y abajo por el cono $\phi = c$, donde $0 < c < \dfrac{\pi}{2}$.

4.24 Hallar el volumen limitado por el plano xy, el cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$.

4.25 Determinar el volumen del sólido comprendido entre los conos $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \sqrt{9x^2 + 9y^2}$ y el plano $z = 3$.

4.26 Calcular el volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ empleando una integral triple en coordenadas esféricas.

4.27 Hallar el volumen del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, interceptado entre el paraboloide $x^2 + y^2 = 2az$ y el plano xy.

4.28 Hallar el volumen limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2x$.

4.29 Evaluar la integral cambiando a coordenadas esféricas.

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dz\, dy\, dx$$

4.30 Evaluar la integral $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,dz\,dx\,dy$ cambiando a coordenadas cilíndricas.

4.31 Evaluar la integral $\int_0^2 \int_{1/2}^1 \int_0^{\sqrt{x-x^2}} (4z+1)\,dy\,dx\,dz$ usando un sistema de coordenadas apropiado.

4.32 La densidad en un punto P de una esfera sólida de radio a, es directamente proporcional a la distancia de P a una recta fija l que pasa por el centro de la esfera. Calcular la masa del cuerpo.

4.33 Calcular el momento de inercia con respecto a la recta l del sólido del problema anterior. Utilícense coordenadas cilíndricas.

4.34 Calcular la masa del sólido limitado arriba por el hemisferio $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ y abajo por el plano $z=4$, si la densidad en un punto P es inversamente proporcional a la distancia al origen.

4.35 Calcular el momento de inercia de un cilindro circular recto homogéneo de altura h y radio de la base a, con respecto al eje del cilindro.

4.36 Plantear y evaluar las integrales necesarias para determinar el centro de masa de un hemisferio homogéneo de radio a.

4.37 Sea un sólido homogéneo en el primer octante, acotado por los planos coordenados y las gráficas de $z = 9 - x^2$ y $2x + y = 6$. Encontrar la coordenada $\bar{x}$ del centro de masa del sólido.

4.38 Hallar el momento de inercia de una esfera de masa m y radio a respecto a cualquier recta tangente.

4.39 Ubicar el centroide del sólido homogéneo limitado por el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y la parte superior de la esfera $x^2+y^2+z^2=2z$.

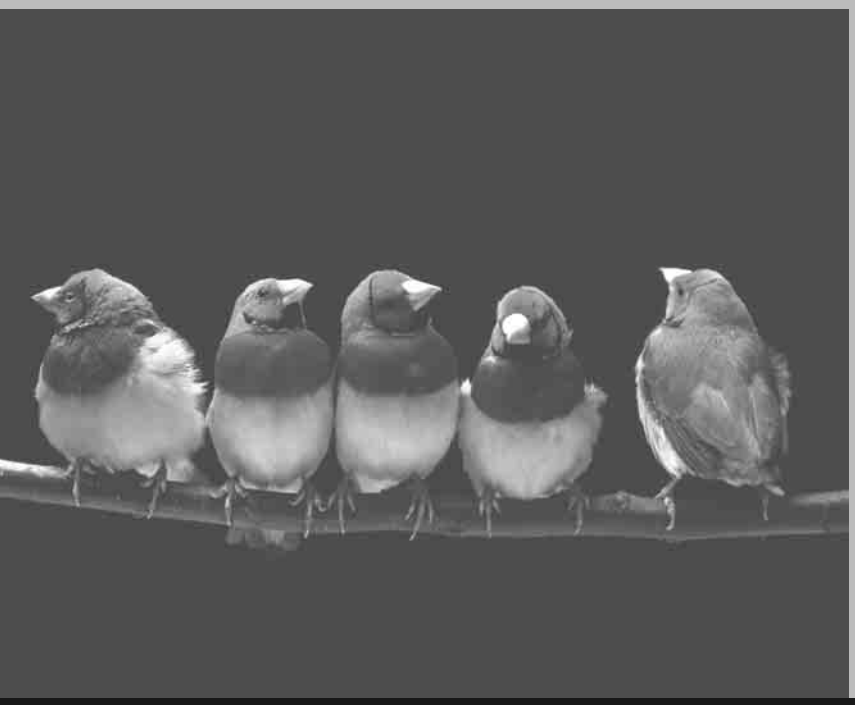
4.40 Hallar el volumen limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y el paraboloide $x^2+y^2=3z$.



Más problemas para resolver.

Capítulo 5

Integración de campos vectoriales



Competencias específicas a desarrollar

- Distingue un vector de un campo vectorial.
- Define un campo vectorial bidimensional y tridimensional.
- Comprende la necesidad de usar campos vectoriales para el cálculo del trabajo mecánico.
- Relaciona la integral de línea con el trabajo de un campo vectorial.
- Resuelve integrales de línea usando ecuaciones cartesianas y paramétricas de la trayectoria.
- Define una integral de línea cerrada y conoce su significado físico.
- Distingue integrales de línea independientes de la trayectoria.
- Comprende la utilidad de usar el teorema de Green, y conoce sus limitaciones.

5.1 Campos vectoriales

El concepto de vector está asociado a ciertas cantidades físicas, las cuales requieren tres características para poder ser definidos: **magnitud**, **dirección** y **sentido**. La representación de un vector se realiza mediante una flecha con un ángulo de inclinación y un sentido establecido (indicado por la punta de la flecha). Con base en lo anterior, es posible definir un conjunto de vectores en una región del espacio donde a cada punto del mismo le corresponda un vector; a este conjunto de vectores se le llama **campo vectorial**.

Es importante destacar que si se pudieran ver todos los vectores de un campo, éste podría ser considerado como una nube densa de vectores.

En la figura 5.1 se muestra un campo vectorial de velocidad determinado por una rueda que gira alrededor de un eje, donde a cada punto de la rueda le corresponde un vector velocidad. Como puede verse en la figura 5.1, los vectores que están más cercanos al eje de rotación tienen una velocidad menor que los vectores que se encuentran ubicados cerca de la periferia. De manera similar, en la figura 5.2 aparece una corriente de agua en la que a cada punto le corresponde un vector determinado; en este caso

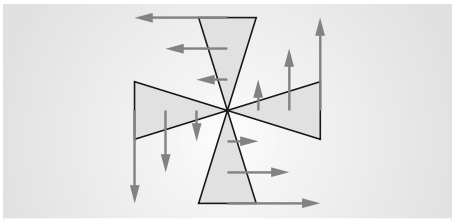


Figura 5.1

se puede observar que los vectores deben ser más grandes en el centro de la corriente de agua.

Lo anterior permite escribir la siguiente definición de campo vectorial en dos y tres dimensiones, respectivamente.



Figura 5.2

Definición 5.1

Un campo vectorial en dos dimensiones puede representarse como una función $\vec{F}$ cuyo dominio está dado para un conjunto de números en $\Re^2$, tales que cada componente de esta función exista. Su correspondiente contradominio (o imagen) es un conjunto de vectores V_2:

$$\vec{F}(x,y) = M(x,y)\hat{\mathbf{i}} + N(x,y)\hat{\mathbf{j}} \qquad \textbf{(5.1)}$$

donde $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones escalares y existen para un conjunto de valores (x, y).

Definición 5.2

Un campo vectorial en tres dimensiones puede representarse como una función $\vec{F}$ cuyo dominio está dado para un conjunto de números en $\Re^3$, tales que cada componente de esta función exista. Su correspondiente contradominio (o imagen) es un conjunto de vectores V_3:

$$\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\hat{\mathbf{i}} + N(x,y,z)\hat{\mathbf{j}} + P(x,y,z)\hat{\mathbf{k}} \qquad \textbf{(5.2)}$$

donde $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$ y $P(x, y, z)$ son funciones escalares y existen para un conjunto de valores (x, y, z).

Actividad de aprendizaje

Con tus propias palabras define qué es un campo vectorial en dos y tres dimensiones.

Ejemplo 5.1

Trazar algunos vectores del siguiente campo vectorial:

$$\vec{F}(x,y)=-y\hat{\mathbf{i}}+x\hat{\mathbf{j}}$$

Solución

La siguiente tabla muestra los vectores $\vec{F}(x,y)$ asociados a varios puntos en el plano *xy*.

(x, y)	$\vec{F}(x,y)$
(1, 1)	$-\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}$
(–1, 1)	$-\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}$
(–1, –1)	$\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}$
(1, –1)	$\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}$
(1, 3)	$-3\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}$
(–3, 1)	$-\hat{\mathbf{i}}-3\hat{\mathbf{j}}$
(–1, –3)	$3\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}$
(3, –1)	$\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}$

En la figura 5.3 se muestran los vectores obtenidos.

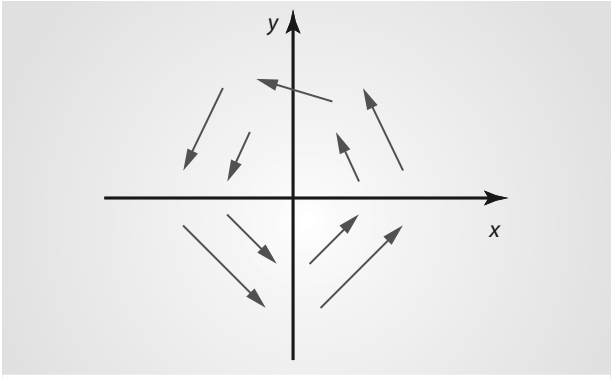


Figura 5.3

Los campos vectoriales que se pueden generar son ilimitados; sin embargo, hay algunos que tienen propiedades muy interesantes y son de gran importancia en el estudio de la mecánica clásica y el electromagnetismo. A continuación se definen algunos de estos campos.

Definición 5.3

Sea $\vec{r}=x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}+z\hat{\mathbf{k}}$ el vector de posición de un punto dado (x, y, z). Se dice que un campo vectorial $\vec{F}$ es un campo de variación inversa al cuadrado si tiene la forma

$$\vec{F}(x,y,z)=\frac{C}{\|\vec{r}\|^2}\hat{\mathbf{u}} \qquad \textbf{(5.3)}$$

donde C es un escalar y $\hat{\mathbf{u}}$ es un vector unitario que tiene la misma dirección de $\vec{r}$ y está dado por:

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\|\vec{r}\|}\vec{r} \qquad \textbf{(5.4)}$$

En mecánica clásica existe un campo que tiene la misma estructura que la ecuación (5.3), el cual recibe el nombre de **campo gravitacional**, enunciado por Isaac Newton y que establece que si una partícula de masa M se coloca en el origen de coordenadas rectangulares, entonces la fuerza que ejerce sobre otra partícula de masa m, localizada en el punto $P(x, y, z)$, está dada por:

$$\vec{F}(x,y,z) = -G\frac{Mm}{\|\vec{r}\|^2}\hat{\mathbf{u}} \qquad \textbf{(5.5)}$$

donde G es una constante llamada constante gravitacional.

Por su parte, en electrostática existe un campo semejante debido a la fuerza eléctrica de un cuerpo cargado. La **ley de Coulomb** cuantifica esta fuerza entre dos cuerpos cargados eléctricamente y establece que si una carga eléctrica puntual, Q, se encuentra en el origen, entonces la fuerza $\vec{F}(x,y,z)$ que ejerce sobre otra carga, q, localizada en algún punto $P(x, y, z)$, está dado por:

$$\vec{F}(x,y,z) = k\frac{Qq}{\|\vec{r}\|^2}\hat{\mathbf{u}} \qquad \textbf{(5.6)}$$

donde k es la constante de Coulomb.

Ejemplo 5.2

Describir el campo $\vec{F}(x, y, z)$ que cumple la definición 5.3 para $C < 0$.

Solución

De (5.4) se puede obtener:

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\|\vec{r}\|}\vec{r}$$

Además,

$$\vec{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

Sustituyendo en (5.3) se puede escribir:

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{C}{\|\vec{r}\|}\vec{r} = \frac{C}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\left(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}\right)$$

Entonces, para $C < 0$ significa que cuando un punto $P(x, y, z)$ se aleja del origen, la dirección del vector asociado $\vec{F}(x,y,z)$ cambia en sentido opuesto y su magnitud disminuye. En la figura 5.4 se muestra la representación de este campo.

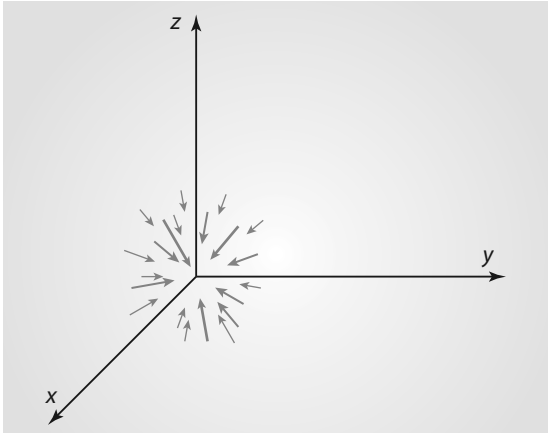


Figura 5.4

Definición 5.4

Se dice que un campo vectorial, $\vec{F}$, es conservativo si es el gradiente de una función escalar, f, está dado por:

$$\vec{F}(x,y,z)=\vec{\nabla}f(x,y,z) \qquad \textbf{(5.7)}$$

Si $\vec{F}$ es conservativo, entonces la función f es una función de potencial para $\vec{F}$ y $f(x, y, z)$ se llama potencial en algún punto $P(x, y, z)$.

Teorema 5.1

Todo campo vectorial de tipo de variación inversa al cuadrado es conservativo.

Demostración

Sea $\vec{F}$ definida antes:

$$\vec{F}(x,y,z)=\frac{Cx}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{\mathbf{i}}+\frac{Cy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{\mathbf{j}}+\frac{Cz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{\mathbf{k}}$$

Según la definición 5.4, si $\vec{F}$ es conservativa existe una función escalar f tal que $\vec{F}(x,y,z)=\vec{\nabla}f(x,y,z)$, y los componentes de $\vec{F}$ son iguales a $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$ y $f_z(x, y, z)$.

Integrando parcialmente respecto a x, y y z, se ve que:

$$f(x,y,z)=\frac{-C}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}$$

Por tanto, $f(x, y, z)$ es la función de potencial.

Definición 5.5

Sea $\vec{F}$ una función vectorial en tres dimensiones dada por:

$$\vec{F}\left(x,y,z\right)=M(x,y,z)\hat{\mathbf{i}}+N\left(x,y,z\right)\hat{\mathbf{j}}+P(x,y,z)\hat{\mathbf{k}}$$

donde M, N y P tienen derivadas parciales continuas en alguna región dada.

El rotacional de $\vec{F}$ está dado por:

$$rot\ \vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ M & N & P\end{vmatrix} \qquad \textbf{(5.8)}$$

El concepto de **rotacional** es muy importante en mecánica de fluidos, pues permite obtener información del aspecto giratorio del movimiento.

Definición 5.6

Supóngase que $\vec{F}(x,y,z)=M(x,y,z)\hat{\mathbf{i}}+N(x,y,z)\hat{\mathbf{j}}+P(x,y,z)\hat{\mathbf{k}}$ tal que M, N y P tienen derivadas parciales continuas en alguna región.

La divergencia de $\vec{F}$ se denota por $div\,\vec{F}$, o bien por $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ y está dada por:

$$div\,\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z} \qquad \textbf{(5.9)}$$

Es importante notar que si $\vec{F}$ es el campo de velocidades en un fluido, entonces $div\,\vec{F}$ proporciona información acerca del flujo o del desplazamiento de la masa. Así,

- Si $div\,\vec{F}<0$ entonces en un punto $P(x, y, z)$ la masa fluye hacia el punto y se dice que hay sumidero en P.
- Si $div\,\vec{F}>0$ entonces la masa fluye desde el punto $P(x, y, z)$ y se dice que hay una fuente en P.

Es importante destacar que la condición $div\,\vec{F}=0$ es característica de fluidos incompresibles.

5.2 Integrales de línea

Trabajo de una fuerza

En los cursos de cálculo integral de una variable es bien sabido que las integrales se realizan a lo largo del eje x, o bien a lo largo del eje y. Pero, ¿éstos son los únicos caminos para poder realizar una integración?, la respuesta a lo anterior está en función de una de las interpretaciones físicas de la integral definida: el trabajo de una fuerza. En física se sabe que una fuerza realiza trabajo sobre un cuerpo, si es posible desplazarlo en la dirección de la fuerza aplicada. Si la fuerza es constante y un cuerpo puede moverse a lo largo de un camino rectilíneo (véase figura 5.5), el trabajo se define de la siguiente manera:

$$W=F\cdot d \qquad \textbf{(5.10)}$$

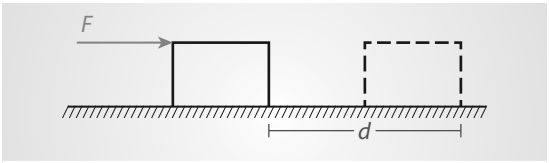


Figura 5.5

Pero si la fuerza cambia conforme el cuerpo avanza, el trabajo en cada porción dx se calcula de la siguiente forma:

$$dW=F(x)\,dx \qquad \textbf{(5.11)}$$

El trabajo total puede obtenerse así:

$$W=\int_0^d F(x)\,dx \qquad \textbf{(5.12)}$$

Las aplicaciones de trabajo cuando existen fuerzas variables y que actúan en la misma dirección son muy numerosas; solo basta con referirse a libros de cálculo integral de una variable para contabilizar las aplicaciones diversas. Por otra parte, si la dirección de la fuerza aplicada también cambia, así como la trayectoria de movimiento del objeto, entonces el cálculo del trabajo requiere otro enfoque, el cual se describe en la siguiente sección.

Trabajo de un campo vectorial

La ecuación (5.12) permite hallar el trabajo de una fuerza variable a lo largo de una trayectoria recta. Pero si se requiere determinar el trabajo de un campo vectorial a lo largo de una trayectoria curvilínea, el proceso es más complejo pues como se vio antes, a cada punto $P(x, y, x)$ le corresponde un vector asociado, el cual realiza un trabajo dado. En la figura (5.6) se muestra una trayectoria curvilínea en dos dimensiones y un grupo de vectores que representan un campo vectorial dado.

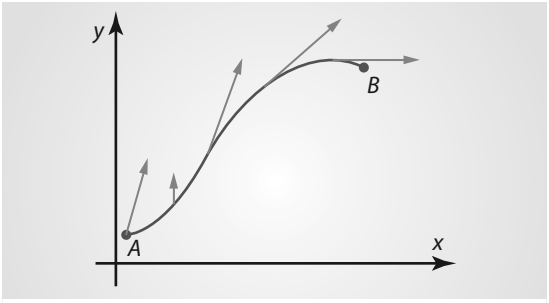


Figura 5.6

Considérese un vector del campo dado que actúa en un elemento diferencial a lo largo de la curva C (véase figura 5.7).

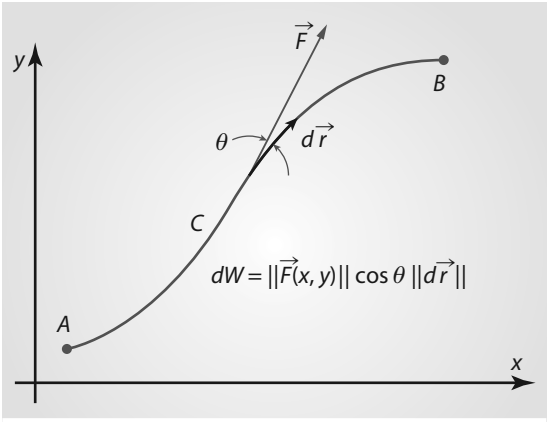


Figura 5.7

Si el campo vectorial se puede escribir como $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\hat{\mathbf{i}} + Q(x, y)\hat{\mathbf{j}}$, y la curva C se puede parametrizar como $x = f(t)$ $y = g(t)$ para $a \le t \le b$, se puede escribir:

$$\vec{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$

donde $d\vec{r} = dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}}$

Entonces el diferencial de trabajo se puede escribir:

$$dW = \left\|\vec{F}(x,y)\right\| \cos\theta \, \|d\vec{r}\| \qquad \textbf{(5.13)}$$

De la definición de producto escalar se puede reconocer que:

$$dW = \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} = \left\|\vec{F}(x,y)\right\| \|d\vec{r}\| \cos\theta \qquad \textbf{(5.14)}$$

Sustituyendo el campo vectorial y el diferencial del vector de posición se tiene:

$$dW = \left[\, P(x,y)\hat{\mathbf{i}} + Q(x,y)\hat{\mathbf{j}}\right]\cdot(dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}})$$

o bien,

$$dW = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \qquad \textbf{(5.15)}$$

El trabajo total a lo largo de la curva C se puede encontrar al integrar la ecuación (5.15), solo que dicha integración debe realizarse a lo largo de la curva dada, lo que se puede escribir como:

$$W = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \qquad \textbf{(5.16)}$$

La definición de trabajo se extiende a un campo en tres dimensiones de la forma $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\hat{\mathbf{i}} + Q(x,y,z)\hat{\mathbf{j}} + R(x,y,z)\hat{\mathbf{k}}$ que actúa a lo largo de una curva C en el espacio, en cuyo caso:

$$\vec{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

La integral dada por la ecuación (5.16) se denomina integral de línea a lo largo de la curva C.

En la siguiente sección se aborda la forma de evaluar este tipo de integrales. Es importante notar que al conocer su interpretación física, resulta más simple comprender su importancia y significado.

Actividad de aprendizaje

En equipo de dos o tres personas investiguen en diferentes fuentes de información alguna aplicación de las integrales de línea en el área de ingeniería. Elaboren una presentación electrónica donde expongan su investigación.

Integral de línea y métodos de evaluación

Integral de línea

Sea $z = G(x, y)$ una función de dos variables, continua en alguna región que contiene a la curva C, la cual puede ser parametrizada en la forma $x = f(t)$ $y = g(t)$ para $a \leq t < b$, y que A y B son los puntos cuyas coordenadas son $(f(a), g(a))$ y $(f(b), g(b))$ (véase figura 5.8).

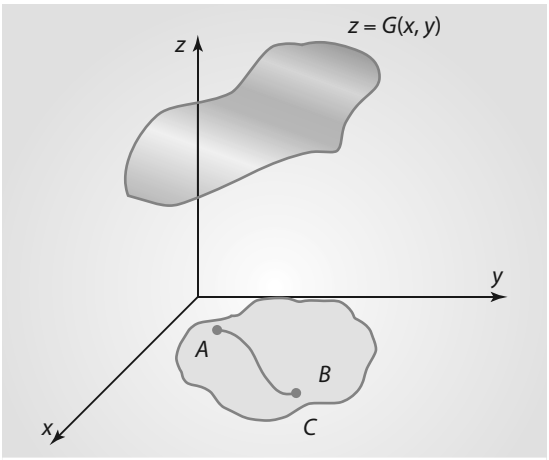


Figura 5.8

Resulta importante destacar que la curva C es aislada si f' y g' son continuas en $[a, b]$ y no son cero simultáneamente en ese intervalo; es aislada parte por parte si se puede expresar como la unión de un número finito de curvaturas aisladas; es una curva cerrada si $A = B$; es una curva cerrada simple si $A = B$ y la curva no se cruza a sí misma; si C es una curva cerrada, entonces el sentido positivo de C es el sentido correspondiente a los valores crecientes de t.

Para generar las integrales de línea correspondientes, es posible dividir la curva C en porciones de arco de longitud Δs_k, según las porciones $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ de $[a, b]$.

Así, sean Δx_k y Δy_k las longitudes de las proyecciones de cada subarco sobre los ejes x y y, respectivamente (véase figura 5.9).

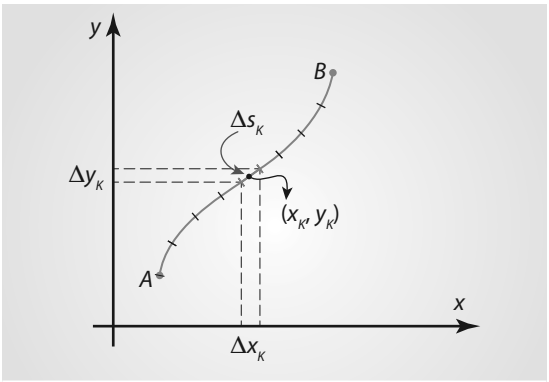


Figura 5.9

De este modo, con base en lo expuesto antes, es posible formar las siguientes integrales de línea:

1. La integral de la línea de G a lo largo de C de A a B con respecto a x es:

$$\int_C G(x, y)\, dx = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k, y_k)\Delta x_k \qquad \textbf{(5.17)}$$

2. La integral de línea de G a lo largo de C de A a B con respecto a y es:

$$\int_C G(x, y)\, dy = \lim_{\Delta y_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k, y_k)\Delta y_k \qquad \textbf{(5.18)}$$

3. La integral de línea de G a lo largo de C de A a B con respecto a la longitud de arco es:

$$\int_C G(x, y)\, ds = \lim_{\Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k, y_k)\Delta s_k \qquad \textbf{(5.19)}$$

MÉTODOS DE EVALUACIÓN

Para evaluar una integral de línea es necesario que solo haya una sola variable de integración, lo cual puede hacerse de dos maneras:

1. Si la curva C se puede representar en forma paramétrica mediante $x = f(t)$, $y = g(t)$ para $a \le t < b$, entonces las integrales (5.17), (5.18) y (5.19) pueden reescribirse así:

$$\int_C G(x, y)\, dx = \int_a^b G\big(f(t), g(t), f'(t)\big)\, dt \qquad \textbf{(5.20)}$$

$$\int_C G(x, y)\, dy = \int_a^b G\big(f(t), g(t), g'(t)\big)\, dt \qquad \textbf{(5.21)}$$

$$\int_C G(x, y)\, ds = \int_a^b G\big(f(t), g(t)\big)\sqrt{\big[f'(t)\big]^2 + \big[g'(t)\big]^2}\, dt \qquad \textbf{(5.22)}$$

En la integral (5.22), es posible notar que el diferencial de arco en ecuaciones paramétricas se define como:

$$ds = \sqrt{\big[f'(t)\big]^2 + \big[g'(t)\big]^2}\, dt$$

2. Si la curva C se puede definir mediante una ecuación cartesiana de la forma $f(x)$, donde $a \le x < b$, se puede utilizar a x como parámetro. Al saber que $dy = f'(x)dx$ y que el diferencial de arco se escribe $ds = \sqrt{1 + \big[f'(x)\big]^2}\, dx$, las integrales de línea se pueden escribir:

$$\int_C G(x, y)\, dx = \int_a^b G\big(x, f(x)\big)\, dx \qquad \textbf{(5.23)}$$

$$\int_C G(x, y)\, dy = \int_a^b G\big(x, f(x)\big) f'(x)\, dx \qquad \textbf{(5.24)}$$

$$\int_C G(x, y)\, ds = \int_a^b G\big(x, f(x)\big)\sqrt{1 + \big[f'(x)\big]^2}\, dx \qquad \textbf{(5.25)}$$

Nota: Si se tiene una curva C aislada en partes, la integral de línea se define como la suma de las integrales de cada una de las curvas aisladas cuya unión es la curva C, es decir:

$$\int_C G(x, y)\, ds = \int_{C_1} G(x, y)\, ds + \int_{C_2} G(x, y)\, ds \qquad \textbf{(5.26)}$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

En equipo seleccionen un método de evaluación y con la ayuda de un video de no más de cinco minutos expliquen el método. Compartan en clase.

Ejemplo 5.3

Evaluar las integrales de línea que se dan a continuación:

a) $\int_C xy^2\ dx$

b) $\int_C xy^2\ dy$

c) $\int_C xy^2\ ds$

Nota: En todas las integrales, la curva C es el cuarto de circunferencia definido en forma paramétrica por:

$$x = 4\cos t,\ y = 4\operatorname{sen} t \text{ para } 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Solución

En la figura 5.10 se muestra el cuarto de circunferencia.

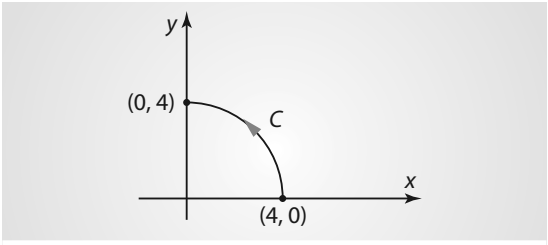


Figura 5.10

Usando las integrales (5.20), (5.21) y (5.22) se puede escribir:

a) $\int_C xy^2\ dx = \int_0^{\pi/2} (4\cos t)(16\operatorname{sen}^2 t)(-4\operatorname{sen} t\ dt) = -64$

b) $\int xy^2\ dy = \int_0^{\pi/2} (4\cos t)(16\operatorname{sen}^2 t)(4\cos t\ dt) = 16\pi$

c) $\int_C xy^2\ ds = \int_0^{\pi/2} (4\cos t)(16\operatorname{sen}^2 t)\sqrt{16(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)}\ dt = \frac{256}{3}$

Notación

En muchas aplicaciones se presentan integrales de línea como una suma:

$$\int_C P(x, y)\ dx + \int_C Q(x, y)\ dy \qquad \textbf{(5.27)}$$

Por lo común, esta suma se suele escribir como una integral sin paréntesis:

$$\int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \qquad \textbf{(5.28)}$$

Recuérdese que para integrales definidas se escribe:

$$\int_a^b F(x)\, dx = -\int_b^a F(x)\, dx \qquad \textbf{(5.29)}$$

Las integrales de línea tienen una propiedad semejante.

Si $\widehat{AB}$ denota integración a lo largo de una línea o curva de C de A a B, entonces:

$$\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy = -\int_{\widehat{BA}} P dx + Q dy \qquad \textbf{(5.30)}$$

Integrales de línea a lo largo de curvas cerradas simples

Las integrales que se han tratado hasta ahora son referidas a lo largo de una curva abierta C; pero si la curva es cerrada simple, es necesario precisar el sentido de integración, ya que los puntos inicial A y terminal B coinciden. Para lo anterior se acostumbra asumir que el sentido de integración alrededor de una curva C es positivo cuando éste es antihorario y negativo cuando el sentido es horario.

Las integrales de línea en curvas cerradas simples se expresan con la siguiente notación:

$$\oint P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \qquad \textbf{(5.31)}$$

Ejemplo 5.4

Evaluar $\oint y^2 dx - x^2 dy$ en la curva C que se muestra en la figura 5.11.

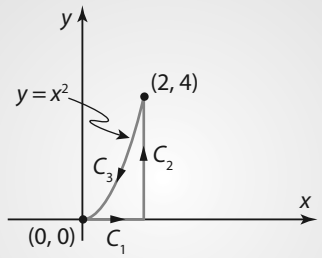


Figura 5.11

Solución

De la figura 5.11 se puede notar que la curva C es aislada, por lo que puede integrarse en partes, es decir,

$$\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} + \oint_{C_3}$$

A lo largo de C_1 se emplea a x como parámetro, donde se ve que $y = 0$ y $dy = 0$; entonces, se puede escribir:

$$\int_{C_1} y^2 dx - x^2 dy = \int_0^2 0 dx - x^2(0) = 0$$

A lo largo de C_2 se usa a y como parámetro, donde se ve que $x = 2$ y $dx = 0$; así, se puede escribir:

$$\int_{C_2} y^2 dx - x^2 dy = \int_0^4 y^2(0) - \int_0^4 4 dy = -16$$

A lo largo de C_3 se emplea de nuevo a x como parámetro, donde se ve que $y = x^2$ y $dy = 2x\,dx$, por lo que se puede escribir:

$$\int_{C_3} y^2 dx - x^2\ dy = \int_2^0 x^4 dx - x^2(2x) dx = \frac{8}{5}$$

Así, la integral cerrada será:

$$\oint y^2 dx - x^2 dy = 0 - 16 + \frac{8}{5} = -\frac{72}{5}$$

Integrales de línea en el espacio

Las integrales de línea de una función $G(x,y,z)$ de tres variables: $\int_C G(x,y,z)dx$, $\int_C G(x,y,z)dy$ y $\int_C G(x,y,z)ds$ se definen de manera análoga. En tanto, el método de evaluación es exactamente el mismo, excepto que ahora la curva paramétrica se puede escribir como:

$$x = f(t) \qquad \textbf{(5.32)}$$

$$y = g(t) \qquad \textbf{(5.33)}$$

$$z = h(t) \qquad \textbf{(5.34)}$$

Solo es necesario adicionar:

$$\int_C G(x,y,z)dz = \int_a^b G\big(f(t), g(t), h(t)\big)h'(t)dt \qquad \textbf{(5.35)}$$

Análogamente,

$$\int_C G(x,y,z)\,ds = \int_a^b G\big(f(t), g(t), h(t)\big)\sqrt{\big[f'(t)\big]^2 + \big[g'(t)\big]^2 + \big[h'(t)\big]^2}\ dt \qquad \textbf{(5.36)}$$

Integrales de línea independientes de la trayectoria

El valor de la integral de línea $\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$, en general depende de la línea o la trayectoria que une dos puntos A y B. De hecho, puesto que la integral de línea es una medida del trabajo que realiza un campo vectorial, es claro que para cada curva C el trabajo cambia su valor. No obstante lo anterior, hay ciertos campos muy especiales cuyo trabajo no depende del camino a recorrer, lo que implica que la integral de línea sea independiente de la trayectoria curva que conecta los puntos A y B.

Actividad de aprendizaje

En el siguiente espacio diseña un mapa conceptual donde muestres las integrales lineales: a) en el espacio, b) independientes de la trayectoria y c) a lo largo de curvas cerradas simples.

Criterio para la independencia de la trayectoria

El teorema que se enuncia a continuación proporciona las condiciones que se requieren para que un campo vectorial sea independiente de la trayectoria.

Teorema 5.2

Sean P y Q funciones continuas y con primeras derivadas parciales continuas en una región dada. Entonces, $\int_C Pdx + Qdy$ es independiente de la trayectoria C si y solo si:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (5.37)$$

5.3 Teoremas de integrales

Teorema de Green y de Stokes

Teorema de Green

Uno de los teoremas más importantes del cálculo integral vectorial relaciona una integral de línea alrededor de una curva cerrada simple aislada parte por parte, con una integral doble en la región limitada por la curva. Este teorema se conoce como teorema de Green en el plano y se enuncia de la siguiente manera:

Sea C una curva cerrada simple aislada parte por parte que limita a una región R. Si P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$ son continuas en R, entonces:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \qquad (5.38)$$

Para definir en forma vectorial al teorema de Green es necesario determinar un concepto conocido como el rotacional de un campo, el cual se escribe así:

Si $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\hat{\mathbf{i}} + Q(x, y)\hat{\mathbf{j}}$ es un campo vectorial bidimensional, entonces el rotacional del campo se define como:

$$rot\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} \qquad (5.39)$$

En notación vectorial, el teorema de Green se puede expresar como:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}ds = \iint_R (rot\vec{F})\cdot\hat{\mathbf{k}}\,dA \qquad \textbf{(5.40)}$$

donde $\vec{T}$ es un vector tangente unitario y *ds* es el diferencial de arco.

Lo anterior significa que la integral de línea de la componente tangencial de $\vec{F}$ es la integral doble de la componente normal de $rot\,\vec{F}$.

La forma vectorial del teorema de Green se puede generalizar para una curva cerrada simple en el espacio de tres dimensiones.

Supóngase que $z = f(x, y)$ es una función continua y con primeras derivadas parciales continuas, cuya gráfica es una superficie *S* sobre una región *R* en *xy*, y que *C* es una curva cerrada simple que forma la frontera de *S*. Asimismo, considérese que la proyección C_{xy} sobre el plano *xy* forma la frontera de *R* (véase figura 5.12). Además, sea un vector tangente unitario $\vec{T}$ de *C* y $\vec{n}$ un vector normal unitario de *S*.

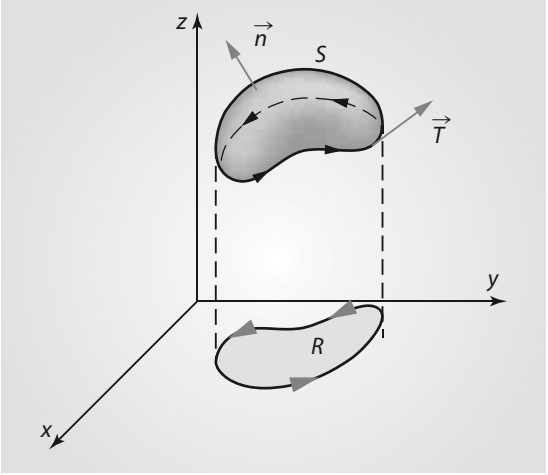


Figura 5.12

La forma tridimensional del teorema de Green se llama **teorema de Stokes** y se enuncia a continuación.

Teorema de Stokes

El teorema de Stokes se puede describir como sigue:

Sea $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\hat{\mathbf{i}} + Q(x, y, z)\hat{\mathbf{j}} + R(x, y, z)\hat{\mathbf{k}}$, un campo vectorial para el cual *P*, *Q* y *R* son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en una región que contiene a una superficie *S*. Si *C* es la frontera de *S* recorrida en sentido positivo, entonces:

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint (\vec{F}\cdot\vec{T})ds = \iint_S (rot\,\vec{F}\cdot\vec{n})dS \qquad \textbf{(5.41)}$$

donde:

s = Longitud de arco

S = Superficie

Actividad de aprendizaje

En equipo elaboren un cartel donde expliquen el teorema de Green y el teorema de Stokes. Expongan sus trabajos en clase. Cuiden su presentación. Sean creativos.

Problemas para resolver

5.1 Evaluar las siguientes integrales de línea:

a) $\int_C G(x, y)dx$

b) $\int_C G(x, y)dy$

c) $\int_C G(x, y)ds$

donde $G(x, y) = 2xy$ a lo largo de la curva C, cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 5 \cos t$ y $y = 5 \operatorname{sen} t$ para los valores de $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

5.2 Evaluar la integral de línea $\int_C (2x + y)dy + xydy$ a lo largo de $y = x + 3$, entre los puntos $P(-1, 2)$ y $Q(2, 5)$.

5.3 Evaluar $\int_C (2x + y)dx + xydy$ en la curva que se muestra en la figura 5.13.

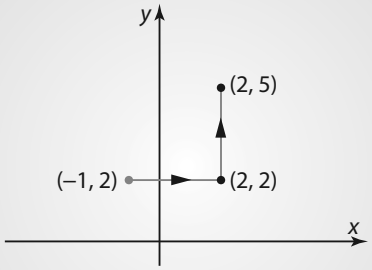


Figura 5.13

5.4 Evaluar $\int_C ydx + xdy$ a lo largo de la parábola $y = x^2$ entre los puntos (0, 0) y (1, 1).

5.5 Evaluar $\int_C (6x^2 + 2y^2)dx + 4xydy$, donde la curva C está representada por las ecuaciones paramétricas $x = \sqrt{t}$ y $y = t$, en el intervalo $4 \le t \le 9$.

5.6 Hallar el valor de $\oint_C (x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy$ en la curva cerrada simple que se muestra en la figura 5.14.

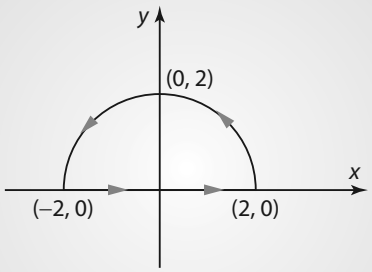


Figura 5.14

5.7 Hallar el valor de la integral cerrada $\oint_C x^2y^3dx - xy^2dy$ donde C es el cuadrado con vértices (1, 1) (−1, 1) (−1, −1) y (1, −1), como se muestra en la figura 5.15.

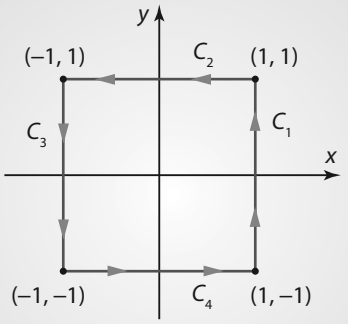


Figura 5.15

5.8 Evaluar $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ a lo largo de los segmentos de recta de (0, 0, 0) a (2, 3, 4) y de (2, 3, 4) a (6, 8, 5).

5.9 Hallar el trabajo realizado por el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = x^3\hat{\mathbf{i}} - x^2y\hat{\mathbf{j}}$ a lo largo de la curva dada en forma vectorial por la ecuación $\vec{r}(t) = e^{-2t}\hat{\mathbf{i}} + e^t\hat{\mathbf{j}}$ en el intervalo $0 \le t \le \ln 2$.

5.10 Hallar el trabajo que realiza el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = 2xy\hat{\mathbf{i}} - 3x\hat{\mathbf{j}}$ a lo largo de la curva dada por la función vectorial $\vec{R}(t) = 3t^2\hat{\mathbf{i}} - t\hat{\mathbf{j}}$ en el intervalo $0 \le t \le 1$.

5.11 Hallar el trabajo que realiza el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (x-y)\hat{\mathbf{i}} + (y+x)\hat{\mathbf{j}}$ a lo largo de la trayectoria cerrada en la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en el sentido de las manecillas del reloj.



Más problemas para resolver.

Capítulo 6

Ecuaciones diferenciales



Competencias específicas a desarrollar

- Define una ecuación diferencial y comprende el concepto de solución.
- Conoce la clasificación de las ecuaciones diferenciales.
- Comprende el concepto de linealidad de una ecuación diferencial.
- Resuelve ecuaciones de primer orden mediante separación de variables.
- Resuelve ecuaciones diferenciales exactas.
- Conoce la importancia del factor integrante en la solución de ecuaciones lineales.
- Resuelve ecuaciones lineales con coeficientes constantes de orden superior.
- Utiliza las ecuaciones diferenciales en la solución de distintos problemas de aplicación.

6.1 Ecuaciones diferenciales

Introducción

Es muy importante hacer énfasis en que los modelos matemáticos representan fenómenos de la realidad. Hasta ahora se pueden reconocer modelos que permiten determinar alguna variable involucrada, que como parte de alguna ecuación debe ser despejada para conocer su valor. Si la ecuación que modela cierto fenómeno es de tipo algebraico, entonces la variable o incógnita es una o más constantes (dependiendo de la naturaleza o del grado de la ecuación), lo que permite determinar los valores fijos para los cuales se cumple el modelo.

Sin embargo, la gran mayoría de los fenómenos cambian con respecto al tiempo, y en general lo hacen de manera variable; es decir, la razón de cambio no es constante, lo que hace necesario que estén definidas como las derivadas de alguna variable dependiente respecto de una o más variables independientes. Lo anterior permite la posibilidad de definir nuevas ecuaciones que (a diferencia de las ecuaciones algebraicas) contengan derivadas o diferenciales. En la siguiente sección se da una definición de esas ecuaciones, así como de algunos de sus métodos de solución.

Definición 6.1

Si una ecuación contiene las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables, se dice que es una ecuación diferencial.

Clasificación de las ecuaciones diferenciales

La clasificación de una ecuación diferencial es muy importante pues permite reconocer el tipo de fenómeno que representa, además de saber si la ecuación tiene solución cerrada (analítica) o de tipo numérica. Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo a tres criterios: tipo, orden y linealidad.

Según el tipo

Esta clasificación se basa en el tipo de derivada que contiene la ecuación; esto es, pueden ser **ordinarias** (para funciones de una variable) o **parciales** (para funciones de varias variables).

Según el orden

En esta clasificación se pone atención en el orden, el cual es la derivada más alta en una ecuación diferencial. Es importante no confundir orden con grado, el cual representa la potencia más alta de una variable.

Por ejemplo, en la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2}+5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-4y=0$ el orden es 2, pero el grado es 3; entonces, constituye una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden.

Según linealidad o no linealidad

La definición de linealidad en una ecuación diferencial es de gran importancia, pues gracias a ésta es posible determinar si la ecuación puede resolverse con técnicas típicas, o bien es necesario introducir métodos alternativos (numéricos) para su solución. El formato que debe tener una ecuación diferencial ordinaria lineal se describe a continuación.

Se dice que una ecuación diferencial es lineal si tiene la forma:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \qquad \textbf{(6.1)}$$

Nótese que el formato dado por la ecuación (6.1) cumple con varios requisitos:

1. La variable dependiente *y*, junto con todas sus derivadas, son de primer grado.
2. Los coeficientes tanto de *y* como de sus derivadas dependen solo de la variable independiente *x*.
3. El segundo miembro es una función de *x*.

Si una ecuación es lineal, entonces es necesario que cumpla con las tres características mencionadas antes.

Actividad de aprendizaje

En el siguiente espacio elabora un mapa conceptual de los tipos de ecuaciones diferenciales.

Solución de una ecuación diferencial

Definición 6.2

Se dice que una función cualquiera *f*, definida en algún intervalo *I*, es solución de una ecuación diferencial en el intervalo, si sustituida en dicha ecuación la reduce a una identidad.

6.2 Ecuaciones diferenciales de primer orden

Métodos de solución

Para comenzar, se abordarán las ecuaciones de primer orden; la forma de resolver estas ecuaciones depende en gran medida de ciertas características o formatos que éstas tengan. A continuación se presentan en forma breve los métodos típicos de solución.

Método de separación de variables

El método de separación de variables consiste en identificar si es posible separar las funciones de cada variable (junto con su diferencial respectivo) en cada miembro de la igualdad.

Definición 6.3

Si una ecuación diferencial ordinaria se puede poner en la forma:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)} \tag{6.2}$$

entonces se dice que es separable o de variables separables.

De (6.2) se pueden separar las funciones de cada variable como sigue:

$$g(y)\,dy=f(x)\,dx \tag{6.3}$$

Integrando en ambos lados se tiene:

$$\int g(y)\,dy=\int f(x)\,dx+c \tag{6.4}$$

El problema del valor inicial

Como se vio antes, la solución de una ecuación diferencial contiene una constante de integración (para ecuaciones de primer orden). En muchas ocasiones, como en aplicaciones físicas y geométricas principalmente, es muy importante conocer esta constante; para determinarla es necesario conocer el valor de la variable dependiente para un valor de la independiente. Lo anterior puede escribirse como sigue:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \quad \text{sujeto} \quad y(x_0)=y_0$$

Asimismo, implica resolver la ecuación diferencial y posteriormente evaluar la constante de integración al sustituir x_0 y y_0 en la solución. A esto se le llama problema de valor inicial, pues en problemas de aplicación la variable independiente es el tiempo, la cual se conoce al iniciar un fenómeno o proceso que se requiere describir.

Es importante destacar que para ecuaciones de orden superior el proceso es semejante, solo que si el orden de la ecuación es n, entonces se requieren n condiciones iniciales de la forma $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1$, $y''(x_0)=y_2$, $y'''(x_0)=y_3$, ..., $y^{(n-1)}(x_0)=y_{(n-1)}$.

Método de los coeficientes homogéneos

El método de coeficientes homogéneos requiere tener una ecuación diferencial en un formato específico. A continuación se presenta el formato.

Si una ecuación diferencial se puede poner en la forma:

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0 \tag{6.5}$$

entonces los coeficientes $M(x, y)$ y $N(x, y)$ pueden tener la propiedad de que para un escalar t:

$$M(tx, ty) = t^n M(x, y) \quad \textbf{(6.6)}$$

$$N(tx, ty) = t^n N(x, y) \quad \textbf{(6.7)}$$

Por tanto, si se cumplen las ecuaciones (6.6) y (6.7), se dice que sus coeficientes M y N son homogéneos de grado n.

La teoría de las ecuaciones diferenciales establece que si una ecuación con el formato (6.5) tiene coeficientes homogéneos, entonces ésta puede reducirse a una ecuación separable mediante una sustitución algebraica adecuada.

Definición 6.4

Se dice que $f(x, y)$ es una función homogénea de grado n si para algún número real n:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

A continuación se establece la metodología de solución para una ecuación de coeficientes homogéneos.

Si una ecuación diferencial tiene la forma:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \quad \textbf{(6.8)}$$

donde M y N tienen el mismo grado de homogeneidad, puede convertirse en una ecuación de variables separables usando alguna de las sustituciones siguientes:

$$y = ux \quad \textbf{(6.9)}$$

$$x = vy \quad \textbf{(6.10)}$$

donde u y v son nuevas variables dependientes.

Es muy importante mencionar que al realizar alguna de las sustituciones dadas por (6.9) o (6.10), la ecuación diferencial resultante tendrá las variables u y x, o bien v y y, lo que implica que es necesario regresar a las variables originales.

Actividad de aprendizaje

En equipo de dos o tres personas y con la ayuda de una presentación electrónica expliquen con detalle la metodología de solución de una ecuación de coeficientes homogéneos.

Ecuaciones exactas

Antes de dar la definición de una ecuación diferencial exacta, es importante recordar el concepto de diferencial total para funciones de dos variables:

Si $z = f(x, y)$ es una función con derivadas parciales de primer orden continuas en R del plano xy, entonces su diferencial total es:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy \quad \textbf{(6.11)}$$

Si la función $f(x, y) = constante$, entonces de (6.11) se deduce que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \qquad \textbf{(6.12)}$$

Por lo descrito antes, es posible generar una ecuación diferencial a partir del diferencial total de una función de dos variables.

Ejemplo 6.1

Sea una función de la forma:

$$f(x, y) = c \qquad \Rightarrow \qquad x^3 - 2xy + y^3 = c$$

El diferencial total está dado por:

$$\left(3x^2 - 2y\right)dx + \left(-2y + 3y^2\right)dy = 0$$

Ésta es una ecuación diferencial que proviene de un diferencial total.

Definición 6.5

Una expresión diferencial de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una diferencial exacta en R del plano xy si corresponde a la diferencial total de una función $f(x, y)$.

Teorema 6.1

Sean $M(x, y)$ y $N(x, y)$ funciones de dos variables continuas y con derivadas parciales de primer orden continuas en R de xy. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que la expresión $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ sea una diferencial exacta es que;

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \textbf{(6.13)}$$

A continuación, se establece la metodología de solución para una ecuación diferencial que tiene su origen en una diferencial total, la cual se conoce con el nombre de **ecuación exacta**.

Si una ecuación diferencial tiene la forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad \textbf{(6.14)}$$

Entonces es necesario probar que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Si lo anterior es cierto, entonces es posible suponer que existe una función $f(x, y)$ tal que:

$$M(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}$$

La función *f* que es la solución de la ecuación diferencial, puede determinarse integrando a $M(x, y)$ respecto a *x*, mientras se mantiene a la variable *y* como constante, pues la derivada parcial de la función *f* está respecto de *x*; lo anterior puede escribirse de la siguiente manera:

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y) \qquad \textbf{(6.15)}$$

Nótese que $g(y)$ representa a la constante de integración, solo que al integrar parcialmente respecto de *x* existe la posibilidad de que la constante dependa de la función *y*. Para conocer el valor de $g(y)$ es necesario derivar a la función obtenida de (6.15) con respecto de *y*, y posteriormente comparar este resultado con la función $N(x, y)$ como sigue:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)+g'(y)=N(x,y) \qquad \textbf{(6.16)}$$

Notando que $g'(y)$ debe estar en $N(x, y)$ e integrando respecto de *y*, y posteriormente sustituyendo en (6.15), se tiene la solución en la forma $f(x, y) = c$.

Ecuaciones lineales

Recuérdese que la forma general de una ecuación diferencial lineal de orden *n* debe cumplir con el formato:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \qquad \textbf{(6.17)}$$

En esta sección se aborda el problema para darle solución a una ecuación de primer orden.

Primero, haciendo $n = 1$ en la ecuación (6.17) se tiene:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \qquad \textbf{(6.18)}$$

Luego, dividiendo entre el coeficiente $a_1(x)$ y renombrando los coeficientes resultantes como $P(x)$ y $f(x)$, respectivamente, la ecuación (6.18) tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x) \qquad \textbf{(6.19)}$$

La ecuación (6.19) tiene el formato requerido para usar el método de solución que se describe más adelante. Nótese que, en general, la ecuación (6.19) no es necesariamente separable, ni con coeficientes homogéneos, ni exacta; sin embargo, la genialidad del método consiste en pensar que existe una función $\mu(x)$ tal que al multiplicar a (6.19) por esta función sea posible convertir la ecuación lineal a una ecuación exacta. Luego, solo es necesario determinar la forma que debe tener esta función tan especial.

En la teoría de las ecuaciones diferenciales se demuestra que la función $\mu(x)$ depende solo de la función coeficiente $P(x)$, y está dada por:

$$\mu(x)=e^{\int P(x)\,dx} \qquad \textbf{(6.20)}$$

De esta manera, a la función $\mu(x)$ se le conoce como **factor integrante**.

El método de solución puede resumirse de la siguiente manera:

1. Dada una ecuación diferencial ordinaria lineal, escribirla en la forma:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$$

2. Hallar el factor integrante:

$$\mu(x)=e^{\int P(x)\,dx}$$

3. Multiplicar la ecuación diferencial por el factor $\mu(x)$ para obtener:

$$e^{\int P(x)\,dx}\,\frac{dy}{dx}+P(x)e^{\int P(x)\,dx}y=e^{\int P(x)\,dx}f(x)$$

El primer miembro es la derivada del producto del factor integrante por la variable dependiente *y*; esto es,

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\,dx}y\right]=e^{\int P(x)\,dx}f(x)$$

4. Por último integrar ambos miembros.

Actividad de aprendizaje

Investiga en diferentes fuentes de información una aplicación práctica de las ecuaciones lineales. Elabora un escrito donde plasmes tu investigación. Entrega a tu profesor.

6.3 Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes de orden superior

Recuérdese que una ecuación lineal de orden *n* tiene el formato:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \qquad \textbf{(6.21)}$$

Si en la ecuación anterior $g(x) = 0$, entonces la ecuación diferencial recibe el nombre de **homogénea**; en caso contrario se denomina **no homogénea**. De igual modo, si se asume que los coeficientes $a_n(x)$ son constantes, la ecuación puede escribirse como:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_2 y'' + a_1 y'' + a_0 y = 0 \qquad \textbf{(6.22)}$$

La solución de ecuaciones de la forma (6.22) depende de la metodología usada para el caso más simple, es decir, de una ecuación de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0 \qquad \textbf{(6.23)}$$

Después de separar variables e integrar, se puede escribir su solución como sigue:

$$y = ce^{-ax} \qquad \textbf{(6.24)}$$

Entonces, parece normal preguntarse si una ecuación diferencial homogénea de orden superior tiene soluciones de forma exponencial, tal y como se encontró en (6.24). Para responder lo anterior, considérese la ecuación homogénea de segundo orden:

$$ay'' + by'' + cy = 0 \qquad \textbf{(6.25)}$$

Proponiendo una solución del tipo $y = e^{mx}$ (donde m es una constante), al sustituir en la ecuación (6.25) se puede escribir:

$$am^2 e^{mx} + bm\, e^{mx} + ce^{mx} = 0 \qquad \textbf{(6.26)}$$

Factorizando a (6.26) se tiene $e^{mx}[am^2 + bm + c] = 0$, por lo que es necesario que:

$$am^2 + bm + c = 0 \qquad \textbf{(6.27)}$$

El análisis anterior permite asegurar que una ecuación diferencial de segundo orden puede ser resuelta a partir de la solución de una ecuación algebraica asociada de segundo grado; de esta manera es posible que la solución tenga soluciones reales y distintas, reales e iguales, o bien complejas.

A continuación se presenta cada caso en función de la naturaleza de las raíces de (6.27).

Caso I

Suponiendo que m_1 y m_2 son dos raíces reales y distintas, la solución de la ecuación diferencial es:

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \qquad \textbf{(6.28)}$$

Caso II

Suponiendo que m_1 y m_2 son reales e iguales, la solución de la ecuación diferencial se escribe así:

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx} \qquad \textbf{(6.29)}$$

Caso III

Si m_1 y m_2 son complejos, entonces m_1 y m_2 pueden escribirse:

$$m_1 = \alpha + i\beta$$

$$m_2 = \alpha - i\beta$$

La solución está dada por la siguiente ecuación:

$$y = c_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + c_2 e^{(\alpha-\beta i)x} \qquad \textbf{(6.30)}$$

Sin embargo, en la práctica es preferible trabajar con funciones reales en vez de exponenciales complejas; así pues, usando la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(6.31)}$$

donde θ es cualquier número real.

De la ecuación (6.30), se puede escribir cada término del segundo miembro mediante la identidad de Euler de la siguiente forma:

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x \qquad \textbf{(6.32)}$$

$$e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x \qquad \textbf{(6.33)}$$

en donde se establece que:

$$\cos(-\beta x) = \cos\beta x$$

y además: $$\operatorname{sen}(-\beta x) = -\operatorname{sen}\beta x.$$

En consecuencia, se puede escribir:

$$y = e^{\alpha x}(c_1(\cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x) + c_2(\cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x)) \qquad \textbf{(6.34)}$$

$$y = e^{\alpha x}[(c_1 + c_2)\cos\beta x + (c_1 i - c_2 i)\operatorname{sen}\beta x] \qquad \textbf{(6.35)}$$

Renombrando las constantes, la solución queda como:

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \operatorname{sen}\beta x) \qquad \textbf{(6.36)}$$

En general, para resolver una ecuación diferencial de orden n de la forma:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad \textbf{(6.37)}$$

es necesario únicamente resolver una ecuación polinomial asociada de grado n:

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \ldots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0 \qquad \textbf{(6.38)}$$

La solución de la ecuación (6.37) depende de la naturaleza de las raíces de la ecuación (6.38), para la cual pueden utilizarse los casos I, II y III, vistos antes.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

En equipo elaboren un tríptico donde expliquen los tres casos anteriores. Sean creativos. Expongan su trabajo en clase.

Ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes constantes de orden superior

Método de variación de parámetros

La ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de segundo orden que tiene la forma:

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad \textbf{(6.39)}$$

recibe el nombre de ecuación **no homogénea** si $f(x)$ no es cero.

A continuación se describe la solución de una ecuación de este tipo, utilizando el método de **variación de parámetros**; cabe mencionar que aquí solo se realiza la descripción del método, por lo que en caso de necesitar una descripción más detallada se debe consultar un libro de ecuaciones diferenciales.

La teoría de las ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes constantes afirma que la solución de la ecuación (6.39) está compuesta de dos partes: una solución homogénea (y_h) y una solución particular (y_p), como se muestra a continuación:

$$y = y_h + y_p \qquad \textbf{(6.40)}$$

La solución homogénea (y_h) puede encontrarse resolviendo la ecuación (6.39), cuando $f(x) = 0$, mediante el uso del método visto en el apartado anterior.

Por otra parte, la solución particular (y_p) está dada a partir de:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 \qquad \textbf{(6.41)}$$

donde y_1 y y_2 representan los términos de la solución de la ecuación homogénea, y las funciones u_1 y u_2 están dadas por:

$$u_1' = \frac{W_1}{W} \qquad \textbf{(6.42)}$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W} \qquad \textbf{(6.43)}$$

donde W es llamado wronskiano, el cual está dado por el determinante:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \qquad \textbf{(6.44)}$$

Nótese que la primera fila del wronskiano consiste en los términos de la solución homogénea, mientras que la segunda fila corresponde a la derivada de cada término de la solución homogénea, es decir, la derivada de cada elemento de la primera fila.

En forma semejante, W_1 y W_2 están dados por los determinantes siguientes:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} \qquad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} \qquad \textbf{(6.45)}$$

Nótese que W_1 se escribe sustituyendo la **primera** columna del wronskiano principal por elementos cero, excepto en el último lugar (el cual contiene la función que hace que la ecuación diferencial sea no homogénea); por su parte, W_2 se escribe sustituyendo la **segunda** columna del wronskiano principal por

elementos cero, excepto en el último lugar (el cual contiene la función que hace que la ecuación diferencial sea no homogénea).

Actividad de aprendizaje

En equipo realicen un video donde expliquen con detalle el método de variación de parámetros.

6.4 Aplicaciones

A continuación se describen algunas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en la modelación de ciertos problemas físicos. De igual modo, en esta sección se muestra que la resolución de una ecuación diferencial equivale a poder predecir el comportamiento de un determinado fenómeno, lo cual hace de incalculable valor la importancia de modelar y resolver las ecuaciones que describen la conducta de situaciones reales.

Problemas de crecimiento y decrecimiento

Hoy día, muchos fenómenos tienen que ver con el crecimiento o decrecimiento de alguna variable. Problemas de crecimiento de bacterias, crecimiento poblacional, incremento de la temperatura en un cuerpo, decrecimiento de la cantidad restante de alguna sustancia química, entre otros, pertenecen al modelo que se estudia en esta sección. Es importante resaltar que, en diversos casos, el crecimiento depende de la cantidad presente.

Si x es la variable que cambia en el tiempo y la rapidez de cambio es proporcional a la cantidad x presente, esta razón de cambio puede escribirse como:

$$\frac{dx}{dt} = kx \qquad \text{sujeto a} \qquad x(t_0) = x_0 \tag{6.46}$$

donde k es una constante de proporcionalidad y $x(t_0) = x_0$ determinan las condiciones iniciales del problema.

Actividad de aprendizaje

Investiga un caso práctico de un problema de crecimiento y decrecimiento. Elabora un escrito de tu investigación y entrega a tu profesor.

Problemas de transferencia de calor: Enfriamiento

Cuando un cuerpo caliente se encuentra en un ambiente a una temperatura menor que la propia, comenzará a enfriarse. Este proceso de transferencia de calor se llama convección. Newton formuló que la rapidez

con que la temperatura de un cuerpo $T(t)$ cambia, es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura constante T_1 del medio que lo rodea, como se especifica en la ecuación (6.47).

$$\frac{dT}{dr} = k\left(T - T_1\right) \qquad \text{sujeto a} \qquad T(t_0) = T_0 \tag{6.47}$$

donde k es una constante de proporcionalidad y $T(t_0) = T_0$, determina las condiciones iniciales del problema.

Circuitos eléctricos

Circuitos L-R en serie

En física se estudia la intensidad de corriente eléctrica i que puede circular a través de un circuito eléctrico formado por conductores, resistores, bobinas y capacitores. Cada uno de estos elementos tiene una función específica; la variación de la intensidad de corriente respecto del tiempo no es constante y puede determinarse mediante la modelación y solución de una ecuación diferencial.

Un circuito L-R en serie consta de una fuente de voltaje, una bobina y una resistencia eléctrica (véase figura 6.1).

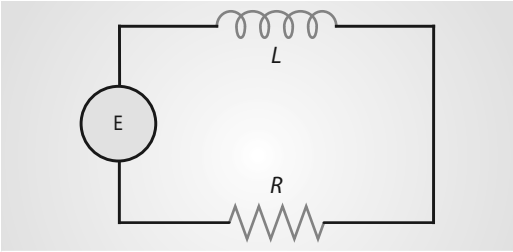


Figura 6.1

Los circuitos eléctricos están regidos por leyes de conservación de energía, una de las cuales es conocida como ley de Kirchhoff, la cual puede enunciarse de la siguiente manera:

> En un circuito o malla cerrado, la suma de las caídas de voltaje en cada elemento es igual al voltaje aplicado.

Recuérdese que el voltaje que se genera en el inductor (bobina) se define como:

$$V_L = L\,\frac{di}{dt} \tag{6.48}$$

donde:

V_L = Voltaje en el inductor (bobina) [volts]

L = Inductancia [henrios]

La caída de voltaje en la resistencia se determina a partir de la ley de Ohm como sigue:

$$V_R = Ri \qquad \textbf{(6.49)}$$

donde

V_R = Voltaje en resistencia [volts]

R = Resistencia eléctrica [ohms]

Por tanto, se puede escribir:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t) \qquad \text{sujeto a} \qquad i(t_0) = i_0 \qquad \textbf{(6.50)}$$

Circuitos R-C en serie

Un circuito R-C en serie consta de una fuente de voltaje, un capacitor (almacenador de carga) y una resistencia eléctrica (véase figura 6.2).

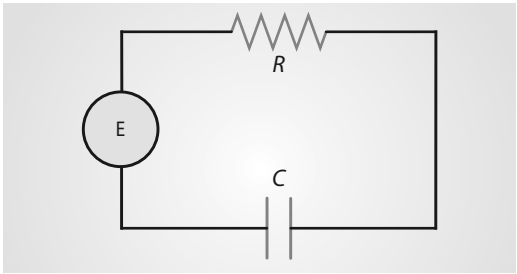


Figura 6.2

Recuérdese que el voltaje que se genera en un capacitor (almacenador de carga) se define como:

$$V_c = \frac{q}{C} \qquad \textbf{(6.51)}$$

donde

V_c = Voltaje del capacitor [volts]

q = Carga eléctrica [coulombs]

C = Capacitancia [farads]

La caída de voltaje en la resistencia se determina a partir de la ley de Ohm como sigue:

$$V_R = Ri \qquad \textbf{(6.52)}$$

Recuérdese que la intensidad de corriente eléctrica es la variación de la carga respecto del tiempo, es decir,

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad \textbf{(6.53)}$$

Después de sustituir la ecuación (6.53) en la ecuación (6.52) y usar la ley de Kirchhoff, es posible escribir:

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{c}=E(t) \qquad \text{sujeto a} \qquad q(t_0)=q_0 \tag{6.54}$$

Problemas de mezclas

Los problemas de mezclas son muy importantes en la industria química y de alimentos. A continuación se presenta un problema típico que permite hallar la cantidad de sustancia en una mezcla realizada.

Ejemplo 6.2

Sea un recipiente que contiene un fluido, en el cual se ha vaciado inicialmente una sustancia; si se mezcla en forma adecuada, se tendrá una mezcla homogénea. Ahora supóngase que se introduce más fluido mezclado con la misma sustancia a una rapidez dada y se drena del recipiente la mezcla del mismo. La pregunta es: ¿cuál es la cantidad de sustancia presente en el tanque en cualquier momento?

Si A es la cantidad de sustancia (en gramos o libras) presente en cualquier momento, en todo momento se cumple que la rapidez de cambio de la cantidad de sustancia es igual a la diferencia de la rapidez con la que entra la sustancia, menos la rapidez con la que sale; lo anterior puede escribirse así:

$$\frac{dA}{dt}=\begin{pmatrix}\text{rapidez con que}\\ \text{entra la sustancia}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{rapidez con que}\\ \text{sale la sustancia}\end{pmatrix} \qquad \text{sujeto a} \qquad A(t_0)=A_0 \tag{6.55}$$

Actividad de aprendizaje

En equipo expliquen frente al grupo el ejemplo 6.2.

PROBLEMAS PARA RESOLVER

6.1 Resolver:

$$(y^2 + yx)dx - x^2 dy = 0$$

6.2 Resolver:

$$y\frac{dx}{dy} = x + 4ye^{-2x/y}$$

6.3 Resolver:

$$\left(y + x\cot\frac{y}{x}\right)dx - xdy = 0$$

6.4 Resolver la ecuación diferencial dada:

$$2x^2\frac{dy}{dx} = 3xy + y^2$$

6.5 Resolver:

$$(2y^2x - 3)\,dx + (2yx^2 + 4)\,dy = 0$$

6.6 Resolver:

$$(\tan x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\,dx + \cos x \cos y\,dy = 0$$

6.7 Resolver:

$$(x+y)^2\,dx + (2xy + x^2 - 1)\,dy = 0 \qquad \text{sujeto a} \qquad y(1) = 1$$

6.8 Resolver:

$$x^2\frac{dy}{dx} + xy = 1$$

6.9 Resolver:

$$\cos x\frac{dy}{dx} + y\operatorname{sen} x = 1$$

6.10 Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{x}$$

6.11 Resolver:

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{(1+e^x)}$$

6.12 Resolver:

$$y''-2y'+y=\frac{e^x}{\left(1+x^2\right)}$$

6.13 Resolver:

$$y''+2y'+y=e^{-x}\ln x$$

6.14 Hallar la solución particular de la ecuación:

$$y'''-2y''-y'+2y=e^{3x}$$

6.15 La población de una pequeña ciudad crece en un instante cualquiera con una rapidez proporcional a la cantidad de habitantes en dicho instante. Si su población inicial de 500 habitantes aumentó 20% en 10 años, ¿cuál será la población dentro de 30 años?

6.16 Un termómetro indica que la temperatura en una habitación es de 80 °F. Si el termómetro se coloca en el exterior donde la temperatura es de 10 °F, después de medio minuto se nota que la temperatura es de 50 °F. ¿Cuál será la temperatura cuando $t = 1$ min? ¿En cuánto tiempo se alcanzarán los 15 °F?

6.17 Se aplica un voltaje de 30 V a un circuito en serie, en el cual la inductancia es de 0.1 henrios y la resistencia es de 50 Ω. Encontrar la intensidad de corriente $i(t)$ si $i(0) = 0$ y determinar i cuando $t \to \infty$.

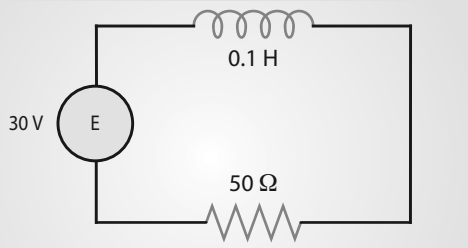


Figura 6.3

6.18 A un circuito en serie en el que la resistencia es 200 Ω y la capacitancia es de 1×10^{-4} F, se le aplica un voltaje de 100 V. Calcular la carga $q(t)$ en el capacitor si $q(0) = 0$ y obtener la corriente.

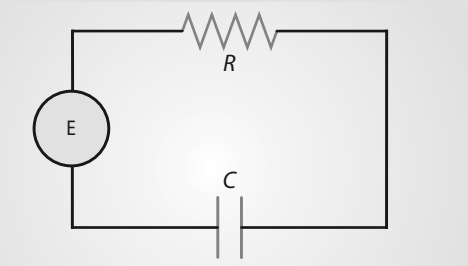


Figura 6.4

6.19 Se disuelven 80 lb de sal en un gran tanque que contiene 600 galones de agua. Posteriormente se bombea agua con sal al tanque a razón de 5 gal/min, y luego la solución mezclada se bombea fuera del tanque a razón de 5 gal/min. Si la concentración de la solución que entró es 2 lb/gal, encontrar la ecuación diferencial que modela la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera.

6.20 Un tanque contiene 200 litros de un líquido, en el que se disuelven 30 gramos de sal. Luego, en el tanque se introduce una mezcla de agua con sal con una concentración de 1 g de sal por cada litro y con un flujo de 4 litros por cada minuto. La solución, adecuadamente mezclada, se bombea hacia fuera con la misma rapidez de flujo. Encontrar el número de gramos $A(t)$ de sal que hay en un instante cualquiera.

6.21 Un gran tanque está prácticamente lleno con 100 galones de líquido, en los que se disuelven 10 galones de sal. Una salmuera que contiene $\frac{1}{2}$ lb de sal por galón se bombea al tanque con una rapidez de 6 gal/min. La solución, adecuadamente mezclada, se bombea en seguida hacia fuera del tanque con una rapidez menor de 4 gal/min. Hallar el número de libras de sal que hay en el tanque después de 30 minutos.



Más problemas para resolver.

Problemas resueltos



Capítulo 1

Vectores y la geometría del espacio



Problemas resueltos

A continuación se presentan los problemas para resolver con su solución detallada.

1.1 Calcular el coseno del ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

$$\vec{a} = -4\hat{\mathbf{i}} + 8\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{b} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

Solución

Se sabe que el producto escalar se define como:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\theta$$

Sustituyendo los vectores dados al inicio se tiene:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(-4\hat{\mathbf{i}} + 8\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right) = -8 + 8 - 3 = -3$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{4^2 + 8^2 + 3^2} = \sqrt{89}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} = \frac{-3}{\sqrt{89}\sqrt{6}} = \frac{-3}{\sqrt{534}}$$

1.2 La magnitud y la dirección de una fuerza están dadas por el vector $\vec{a}$. Calcular el trabajo realizado cuando el punto de aplicación se mueve de *P* a *Q*.

$$\vec{a} = -\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}\ ,\ P(4, 0, -7),\ Q(2, 4, 0).$$

Solución

Para comprender mejor esta situación, en la figura 1.1 se muestra una representación sencilla de los vectores (nótese que aunque los vectores están en tres dimensiones, ésta solo se usa para entender las posiciones de los vectores dados).

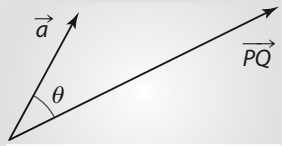


Figura 1.1

Si el vector va de *P* a *Q*, entonces el vector $\overrightarrow{PQ}$ se obtiene restando las coordenadas del punto final *Q* menos las del punto inicial *P*. Posteriormente, de la definición de trabajo, éste se encuentra como la proyección del vector $\vec{a}$ sobre el vector $\overrightarrow{PQ}$ como sigue:

$$\overrightarrow{PQ} = -2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}}$$

$$\underbrace{\vec{a}\cdot\overrightarrow{PQ} = \|\vec{a}\|\|\overrightarrow{PQ}\|\cos\theta}_{\text{Trabajo}}$$

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{PQ} = \left(-\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(-2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{PQ} = 2 + 20 - 21 = 1$$

1.3 Una persona tira de una vagoneta sobre un terreno horizontal, ejerciendo una fuerza de **20 N** aplicada a 30°. Calcular el trabajo realizado cuando la vagoneta recorre 100 m (véase figura 1.2).

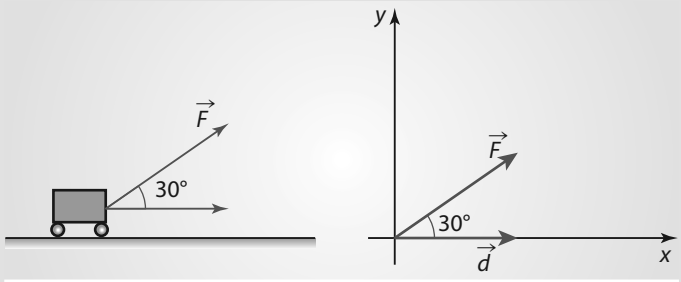


Figura 1.2

Solución

El trabajo se puede encontrar a partir de la definición de producto punto.

$$\vec{F}\cdot\vec{d} = \|\vec{F}\|\|\vec{d}\|\cos\theta$$

Por tanto, la fuerza ejercida se puede calcular mediante el uso de las componentes horizontales y verticales:

$$\vec{F} = 20\cos 30\hat{\mathbf{i}} + 20\operatorname{sen} 30\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{F} = 17.32\hat{\mathbf{i}} + 10\hat{\mathbf{j}}$$

Puesto que la vagoneta se mueve en dirección horizontal, el vector distancia se puede escribir como:

$$\vec{d} = 100\hat{\mathbf{i}}$$

Por lo anterior, el trabajo puede calcularse de la siguiente manera:

$$\vec{F}\cdot\vec{d} = (17.32\hat{\mathbf{i}} + 10\hat{\mathbf{j}})\cdot(100\hat{\mathbf{i}}) = 1\,732 \text{ Nm} = 1\,732 \text{ Joules}$$

1.4 Una caja rectangular tiene longitud *a*, anchura *b* y altura *c*. Sea *P* el centro de la caja. Usar vectores para encontrar una expresión del ángulo *APB* en términos de *a*, *b* y *c* (véase figura 1.3).

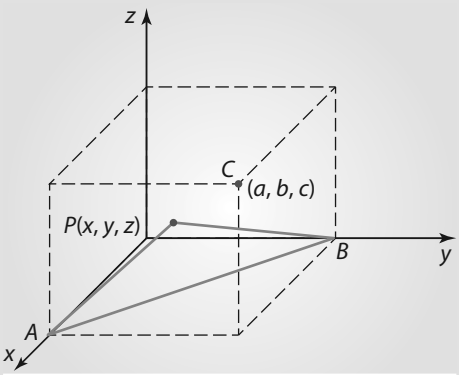


Figura 1.3

Solución

En este caso, primero es necesario encontrar las coordenadas del punto medio *P* y de los puntos *A*, *B* y *C* para luego encontrar los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ esto con la intención de encontrar el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$.

Sea $P(x, y, z)$ el punto medio.

Las coordenadas del punto medio de *OC* y de los puntos *A*, *B* y *C* son:

$$P\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

$$A(a, 0, 0)$$

$$B(0, b, 0)$$

$$C(a, b, c)$$

Los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ se pueden escribir como:

$$\overrightarrow{PA} = \left\langle \frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right\rangle$$

$$\overrightarrow{PB} = \left\langle -\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right\rangle$$

El producto escalar y los módulos de los vectores pueden calcularse como sigue:

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = \left\|\overrightarrow{PA}\right\|\left\|\overrightarrow{PB}\right\|\cos\theta \qquad \textbf{(a)}$$

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = \frac{-a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}$$

$$\left\|\overrightarrow{PA}\right\| = \sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\left\|\overrightarrow{PB}\right\| = \sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Sustituyendo en (a),

$$\frac{1}{4}\left(-a^2-b^2+c^2\right) = \frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{-a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2} \qquad \textbf{(b)}$$

Para el caso particular de que se trate de un cubo:

$$a = b = c$$

Sustituyendo en (b) se tiene

$$\cos\theta = \frac{-1-1+1}{1+1+1} = -\frac{1}{3}$$

$$\theta = 109.47°$$

1.5 Hallar el área del triángulo determinado por los siguientes puntos:

$$P_1(1, 1, 1) \qquad P_2(1, 2, 1) \qquad P_3(1, 1, 2)$$

Solución

En la figura 1.4 se representa un esquema de los puntos dados (es importante mencionar que esta representación solo sirve para tener una referencia de la ubicación de los puntos dados y nunca es su ubicación real, pues los puntos que se dan en el planteamiento del problema se encuentran en tres dimensiones).

Los vectores se determinan restando las coordenadas de los puntos finales menos las coordenadas de los puntos iniciales, en tanto que el área se halla usando la definición del producto vectorial.

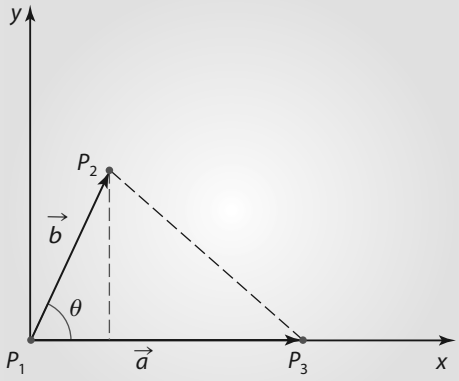


Figura 1.4

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \hat{\mathbf{k}} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \hat{\mathbf{j}} = \vec{b}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\hat{\mathbf{i}}$$

$$\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\| = 1$$

$$A=\frac{1}{2}\left\|\vec{A}\times\vec{B}\right\|$$

$$A=\frac{1}{2}$$

1.6 Calcular el área del triángulo determinada por los puntos:

$$P_1(1,2,4) \qquad P_2(1,-1,3) \qquad P_3(-1,-1,2)$$

Solución

En la figura 1.5 se muestra un esquema de los puntos dados (es importante mencionar que esta representación solo sirve para tener una referencia de la ubicación de los puntos dados y nunca es su ubicación real, pues los puntos que se dan en el planteamiento del problema se encuentran en tres dimensiones).

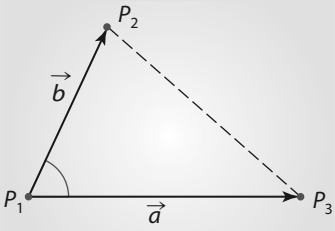


Figura 1.5

Los vectores se determinan restando las coordenadas de los puntos finales menos las coordenadas de los puntos iniciales, en tanto que el área se halla usando la definición del producto vectorial:

$$\overrightarrow{P_1P_3}=\vec{a}=-2\hat{\mathbf{i}}-3\hat{\mathbf{j}}-2\hat{\mathbf{k}}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\vec{b}=-3\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}}$$

$$A=\frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{2}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ -2 & -3 & -2\\ 0 & -3 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\hat{\mathbf{i}}(3-6)-\hat{\mathbf{j}}(2)+\hat{\mathbf{k}}(6)$$

$$=-3\hat{\mathbf{i}}-2\hat{\mathbf{j}}+6\hat{\mathbf{k}}$$

$$\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|=\sqrt{9+4+36}=7$$

$$A=\frac{7}{2}=3.5\ \text{u}^2$$

1.7 En la figura 1.6 se muestra el vector $\vec{a}$ que se encuentra en el plano *xy* a 60° respecto de la horizontal, y el vector $\vec{b}$ que se halla sobre el eje *z* positivo; los módulos de los vectores son, respectivamente:

$$\left\|\vec{a}\right\|=6.4 \qquad\qquad \left\|\vec{b}\right\|=5$$

a) Evaluar $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$

b) Aplicar la regla de la mano derecha para hallar la dirección de $\vec{a}\times\vec{b}$.

c) Emplear b) para expresar $\vec{a}\times\vec{b}$ en términos de $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$.

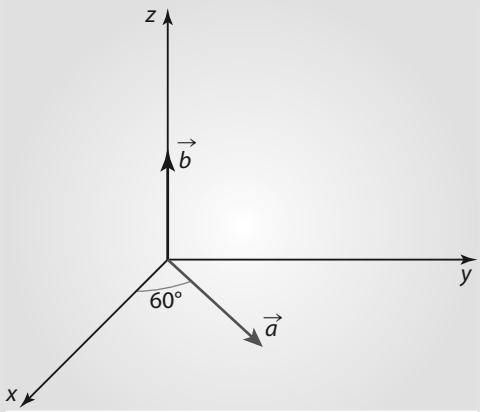


Figura 1.6

Solución

a) Recordar que el producto cruz se define como:

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\operatorname{sen}\theta$$

Puesto que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son mutuamente perpendiculares, el ángulo entre ambos es de 90° y se escribe:

Para $\theta = 90°$ se tiene que,

$$\operatorname{sen} 90° = 1$$

Sustituyendo las magnitudes de los vectores en la definición de producto vectorial se tiene:

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = (6.4)(5) = 32$$

b) Por la regla de la mano derecha, y puesto que el producto vectorial es un vector ortogonal a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se puede notar que el vector se encuentra perpendicular a cada uno de los vectores originales en el plano *xy*, como se aprecia en la figura 1.7.

c) El producto cruz se puede determinar a partir de las componentes en el plano *xy*, con ayuda del ángulo de 30°, es decir,

$$\vec{a}\times\vec{b} = 32\cos 30\hat{\mathbf{i}} + 32\operatorname{sen} 30\hat{\mathbf{j}}$$

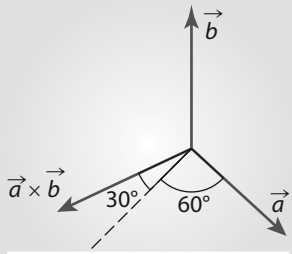


Figura 1.7

1.8 Hallar el volumen del paralelepípedo para el cual los vectores indicados son tres de sus aristas.

$$\vec{a} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} \qquad \vec{b} = -\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} \qquad \vec{c} = 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$$

Solución

En la figura 1.8 aparece un paralelepípedo con las tres aristas correspondientes.

Recúerdese que el volumen de un prisma se puede obtener de la forma siguiente:

$$V = (\text{área base})\ \text{altura}$$

o bien se puede escribir,

$$V = |\vec{a}\times\vec{b}|\ \text{altura}$$

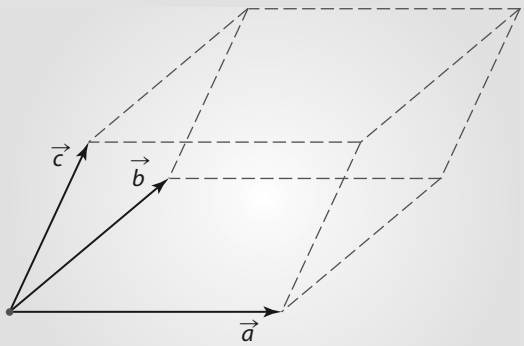


Figura 1.8

Se ha encontrado que el volumen de un paralelepípedo con vectores que representan a sus aristas se puede calcular de la siguiente manera:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\underbrace{|\vec{c}|\cos\theta}_{\text{altura}}$$

$$|\vec{c}|\cos\theta=\frac{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\right)}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}$$

Nótese que se ha utilizado la expresión para calcular la proyección de un vector sobre otro. Entonces,

$$V=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\frac{\left[\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right]}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}$$

Por último, se puede concluir que:

$$V=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$$

Sustituyendo los vectores en el determinante para hallar el producto cruz se obtiene:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\hat{\mathbf{i}}(0)-\hat{\mathbf{j}}(0)+\hat{\mathbf{k}}(4+1)$$

$$=5\hat{\mathbf{k}}$$

Por consiguiente, el volumen se encuentra al escribir el producto escalar faltante como:

$$V=\left(5\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(2\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$V=10\ \text{u}^3$$

1.9 Dados los puntos $P(1,-1,2)$, $Q(0,3,-1)$ y $R(3,-4,1)$, calcular el volumen del paralelepípedo que tiene lados adyacentes OP, OQ, OR.

Solución

En la figura 1.9 se muestra un paralelepípedo con las tres aristas correspondientes.

Los vectores que corresponden a las aristas del paralelepípedo se pueden encontrar restando las coordenadas de los puntos finales menos las coordenadas de los puntos iniciales de cada vector:

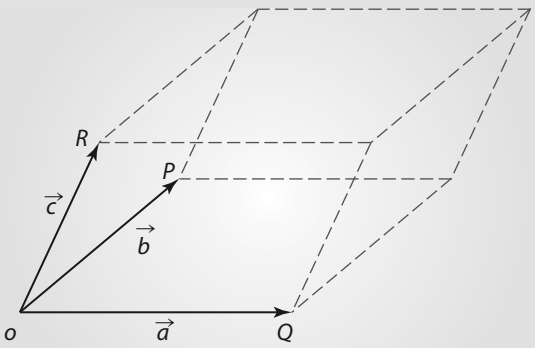


Figura 1.9

$$\vec{a} = \overrightarrow{OQ} = 3\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{OP} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{OR} = 3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

donde:

$$V = (\text{área de base}) \text{ altura}$$

$$= |\vec{a} \times \vec{b}| \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

$$= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\mathbf{i}}(6-1) - \hat{\mathbf{j}}(1) + \hat{\mathbf{k}}(-3)$$

$$= 5\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$$

Por su parte, el volumen es

$$V = (5\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}) \cdot (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) = 15 + 4 - 3 = 16 \text{ u}^3$$

1.10 Calcular la distancia d, del punto $A(2, -6, 1)$ a la recta l que pasa por $B(3, 4, -2)$ y $C(7, -1, 5)$.

Solución

En la figura 1.10 se muestra una representación de la situación planteada.

Como se puede ver, en esta figura se muestran los puntos A, B y C, además del vector director $\vec{a}$ que le da dirección a la recta en el espacio. Por su parte, el segmento m representa la distancia del punto B a la perpendicular trazada desde el punto A a la recta.

Las ecuaciones paramétricas de la recta se pueden escribir así:

$$x = x_1 + a_1 t$$

$$y = y_1 + a_2 t$$

$$z = z_1 + a_3 t$$

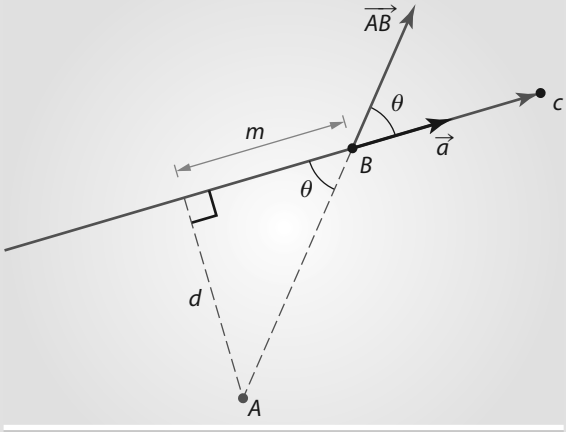


Figura 1.10

El vector director $\vec{a}$ se puede determinar a partir de los puntos *B* y *C*, restando las coordenadas del punto *C* menos las del punto *B*, con lo que se obtiene:

$$\vec{a} = 4\hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}}$$

Sustituyendo el vector director y un punto por el que pasa la recta (por ejemplo, el punto *B*) en las ecuaciones paramétricas de la recta definidas antes, se tiene:

$$x = 3 + 4t$$
$$y = 4 - 5t$$
$$z = -2 + 7t$$

Asimismo, para encontrar la distancia solicitada es necesario hallar el vector $\overrightarrow{AB}$ a fin de determinar su proyección sobre la recta. De este modo, de la definición de producto escalar se tiene:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{a} = \left|\overrightarrow{AB}\right| |\vec{a}| \cos\theta,$$

además: $$\overrightarrow{AB} = \hat{\mathbf{i}} + 10\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$$

Por su parte, el segmento *m* se puede hallar utilizando la proyección del vector $\overrightarrow{AB}$ sobre el vector director, que se encuentra sobre la recta; esto es:

$$(\cos\theta)\left|\overrightarrow{AB}\right| = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{4 - 50 - 21}{\sqrt{16 + 25 + 49}} = m$$

Utilizando el teorema de Pitágoras, la distancia *d* es:

$$d = \sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - m^2}$$

$$d = \sqrt{110 - 49.87} = 7.75 \text{ u}$$

1.11 Encontrar una fórmula para determinar la distancia mínima entre l_1 y l_2 que se cruzan (oblicuas) (véase la figura 1.11).

Nota: Dos rectas se cruzan cuando no son paralelas y no se cortan.

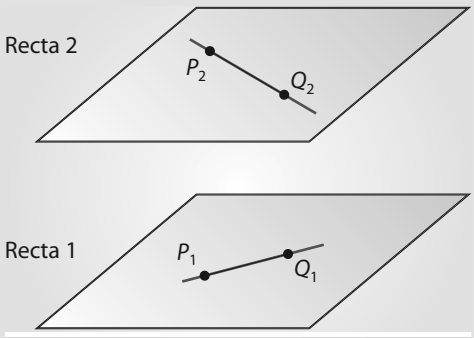


Figura 1.11

Solución

La solución a este problema radica en encontrar un vector normal a ambos planos, ya que si esto no se cumple, las distancias que se pueden hallar no son las mínimas. Así, sean $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ los vectores directores de cada recta.

Como $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ están en planos paralelos, entonces el vector perpendicular (normal a ambos planos) se puede encontrar como:

$$\vec{N} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \overrightarrow{P_1Q_1} \times \overrightarrow{P_2Q_2}$$

Obsérvese en la figura 1.12 que $\vec{N}$ está en la dirección de la d mínima:

$$d = (\cos\theta)\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\|$$

De la definición de producto escalar se tiene que:

$$\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\|\left\|\vec{N}\right\|\cos\theta = \overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{N}$$

Entonces, la distancia es:

$$d = \frac{\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{N}}{\left\|\vec{N}\right\|}$$

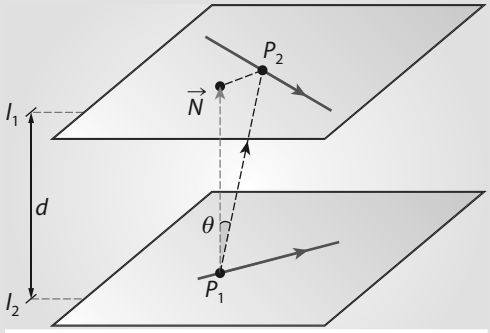


Figura 1.12

1.12 Demostrar que los planos $4x - 2y + 6z = 3$ y $-6x + 3y - 9z = 4$ son paralelos y que la distancia entre ellos es d (d mínima). Calcular d mínima.

Solución

Para la solución de este problema es necesario el uso del resultado obtenido en el problema 1.11.

Como se recordará, dos planos son paralelos si sus vectores normales también lo son; nótese que el vector normal para cada plano se encuentra a partir de los coeficientes de las variables x, y y z de la ecuación del plano dada, esto es,

$$\vec{N}_1 = 4\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{N}_2 = -6\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 9\hat{\mathbf{k}}$$

La condición de paralelismo entre planos es:

$$\vec{N}_1 = k\vec{N}_2$$

en donde k es un escalar.

Después de sustituir los vectores normales en la condición de paralelismo se encuentra que:

$$k = -\frac{2}{3}$$

lo que permite concluir que ambos planos son paralelos.

En la figura 1.13 se muestra la distancia que se pide calcular entre dos planos dados (es importante mencionar que los planos de esta figura solo se usan para comprender el problema y no son los que se proporcionan originalmente).

Sean P_1 un punto perteneciente al plano 1 y P_2 un punto perteneciente al plano 2. Como se recordará del problema anterior, es necesario tener un punto de cada plano, para lo cual es suficiente

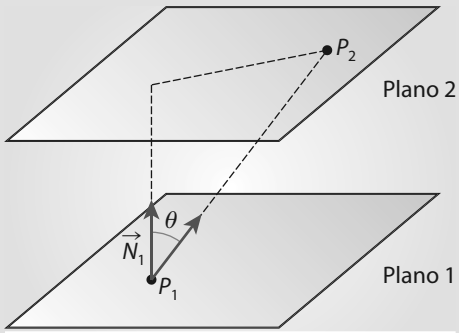


Figura 1.13

encontrar un punto cualquiera (la idea es que este punto sea sencillo de localizar —por ejemplo, una intersección con algún eje coordenado—).

- Para el plano 1, su intersección en el eje z se da cuando las coordenadas en x y y son iguales a cero; entonces, después sustituir lo anterior en el plano $4x - 2y + 6z = 3$, se encuentra:

$$P_1\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$$

- Para el plano 2, su intersección en el eje z se da cuando las coordenadas en x y y son iguales a cero; entonces, después sustituir lo anterior en el plano $-6x + 3y - 9z = 4$, se encuentra:

$$P_2\left(0, 0, -\frac{4}{9}\right)$$

Lo anterior permite encontrar el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ dado por:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = -\frac{17}{18}\hat{\mathbf{k}}$$

Como se vio en el problema anterior, la distancia entre estos planos paralelos puede ser calculada con la expresión:

$$d = \frac{\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{N}}{\left\|\vec{N}\right\|}$$

en donde ahora puede usarse cualquier vector normal (en este caso se tienen dos vectores normales, uno de cada plano).

Usando el vector:

$$\overline{N}_1 = 4\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}}$$

se tiene,

$$d = \frac{\overrightarrow{P_1P_2}\,\overline{N}_1}{\left\|\overline{N}_1\right\|} = \frac{\left|-\frac{17}{3}\right|}{\sqrt{16+4+36}} = 0.7572\ u$$

1.13 La recta l tiene parametrización $x = 3t + 1$, $y = -2t + 4$, $z = t - 3$. Hallar una ecuación del plano que contenga a l y al punto $P(5, 0, 2)$.

Solución

En la figura 1.14 se muestra un plano genérico con una recta sobre éste y dos puntos: P_1, que se encuentra sobre la recta, y P_2, que se halla sobre el plano.

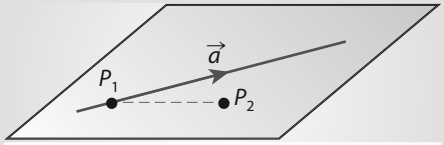


Figura 1.14

De las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$x = 3t + 1$$
$$y = -2t + 4$$
$$z = t - 3$$

En este caso es posible identificar al vector director, $\vec{a} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ y al punto del plano, $P_1(1, 4, -3)$.

Así, se denota como $P_2(5, 0, 2)$ al punto que se encuentra en el plano.

Para encontrar la ecuación del plano es necesario tener el vector normal asociado, el cual se puede hallar al realizar el producto vectorial entre los vectores:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = 4\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}} \text{ y } \vec{a} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 4 & -4 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\mathbf{i}}(-4 + 10) - \hat{\mathbf{j}}(4 - 15) + \hat{\mathbf{k}}(-8 + 12)$$

$$= 6\hat{\mathbf{i}} + 11\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$$

Por último, recordando la ecuación del plano se tiene:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

En este caso se puede sustituir el vector normal encontrado antes y un punto sobre el plano; por ejemplo, se puede usar $P_2(5, 0, 2)$, de lo cual resulta:

$$6(x - 5) + 11(y - 0) + 4(z - 2) = 0$$
$$6x - 30 + 11y + 4z - 8 = 0$$

Simplificando,

$$6x + 11y + 4z = 38$$

1.14 Obtener las ecuaciones de la recta que pasa por (3, 6, 4), corta al eje z y es paralela al plano.

$$x - 3y + 5z - 6 = 0$$

Solución

En la figura 1.15 se muestra la recta que corta al eje z, así como el plano paralelo a la recta, junto con su vector normal, que debe ser perpendicular al vector director de la recta.

En la ecuación del plano $x-3y+5z-6=0$ es sencillo identificar el vector normal, el cual está dado por:

$$\vec{N}=\hat{\mathbf{i}}-3\hat{\mathbf{j}}+5\hat{\mathbf{k}}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta se pueden escribir de la siguiente manera:

$$x=x_1+a_1t$$
$$y=y_1+a_2t$$
$$z=z_1+a_3t$$

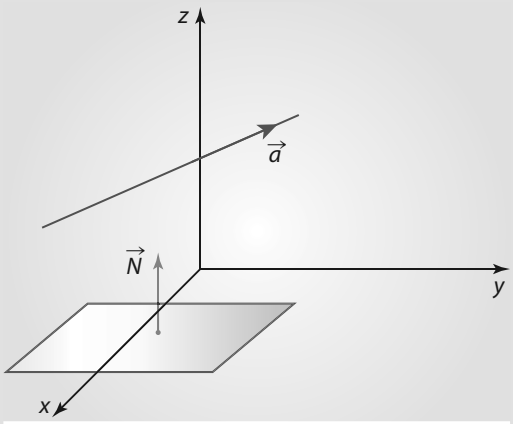


Figura 1.15

donde el vector $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ representa la dirección de la recta en el espacio. La condición del problema establece que si la recta corta al eje z, entonces en las ecuaciones paramétricas debe haber un valor de parámetro t para el cual $x=0, y=0$ (cuando la recta corta z, las coordenadas de x y y deben ser cero). Lo anterior se puede escribir así:

$$x=3+a_1t \quad \Rightarrow \quad x=0 \qquad t=-\frac{3}{a_1}$$

$$y=6+a_2t \quad \Rightarrow \quad y=0 \qquad t=-\frac{6}{a_2}$$

$$z=4+a_3t$$

$$\therefore \quad -\frac{3}{a_1}=-\frac{6}{a_2}$$

o bien,

$$a_2=2a_1 \qquad \textbf{(1)}$$

Sustituyendo en $\vec{a}$:

$$\vec{a}=\langle a_1,2a_1,a_3\rangle$$

Puesto que el plano es paralelo a la recta, se debe cumplir que el vector normal (del plano) y el vector director (de la recta) deben ser perpendiculares, lo que significa que el producto escalar entre estos vectores debe ser cero.

$$\vec{N}\cdot\vec{a}=0$$
$$\left(\hat{\mathbf{i}}-3\hat{\mathbf{j}}+5\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(a_1\hat{\mathbf{i}}+2a_1\hat{\mathbf{j}}+a_3\hat{\mathbf{k}}\right)=0$$
$$a_1-6a_1+5a_3=0$$
$$-5a_1+5a_3=0$$

Entonces,

$$a_1=a_3 \qquad \textbf{(2)}$$

Sustituyendo (2) en $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \langle a_1, 2a_1, a_1 \rangle$$

Las ecuaciones simétricas son:

$$\frac{x-3}{a_1} = \frac{y-6}{a_2} = \frac{z-4}{a_3}$$

$$\frac{x-3}{a_1} = \frac{y-6}{2a_1} = \frac{z-4}{a_1}$$

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-4}{1}$$

1.15 Determinar la ecuación del plano que contiene a (2, 3, –5) y es paralelo a $x + y - 4z = 1$.

Solución

La ecuación del plano tiene la forma:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Puesto que el plano que se busca es paralelo al plano $x + y - 4z = 1$, entonces ambos planos comparten su vector normal.

Vector normal: $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}}$

Sustituyendo el vector normal y el punto dado en la ecuación del plano se tiene:

$$(x - 2) + (y - 3) - 4\,(z + 5) = 0$$

$$x + y - 5 - 4z - 20 = 0$$

$$x + y - 4z = 25$$

1.16 Hallar la ecuación del plano que contiene a (3, 6, 12) y es paralelo al plano *xy*.

Solución

La ecuación del plano tiene la forma:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Puesto que el plano que se busca es paralelo al plano *xy*, el vector normal está en *z*, donde $a = 0$ y $b = 0$.

Entonces la ecuación del plano puede escribirse como:

$$c(z - 12) = 0$$

o bien,

$$z = 12$$

1.17 Determinar la ecuación del plano que contenga a las rectas.

Recta I	Recta II
$x = 1 + 3t$	$x = 4 + 4s$
$y = 1 - t$	$y = 2s$
$z = 2 + t$	$z = 3 + s$

Solución

Como en este caso se conocen las rectas, es posible identificar sus vectores directores y un punto sobre cada una de éstas.

De la recta I	De la recta II
$P_1(1, 1, 2)$	$P_2(4, 0, 3)$
$\vec{a}_1\langle 3, -1, 1\rangle$	$\vec{a}_2\langle 4, 2, 1\rangle$

donde los vectores $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ están en el plano dado, así como los puntos P_1 y P_2.

El vector normal del plano puede hallarse como sigue:

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 10\hat{\mathbf{k}}$$

De la ecuación del plano,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Sustituyendo $P_1(1, 1, 2)$ y el vector normal se obtiene:

$$\begin{aligned} -3(x - 1) + (y - 1) + 10(z - 2) &= 0 \\ -3x + 3 + y - 1 + 10z - 20 &= 0 \\ -3x + y + 10z &= 18 \end{aligned}$$

De forma similar, sustituyendo el punto $P_2(4, 0, 3)$ y el vector normal en la ecuación del plano se tiene:

$$\begin{aligned} -3(x - 4) + (y - 0) + 10(z - 3) &= 0 \\ -3x + 12 + y + 10z - 30 &= 0 \\ -3x + y + 10z &= 18 \end{aligned}$$

Como puede verse, las ecuaciones obtenidas representan el mismo plano.

1.18 Determinar la ecuación del plano que contenga a las siguientes rectas paralelas:

Recta I	Recta II
$x = 1 + t$	$x = 3 + s$
$y = 1 + 2\,t,$	$y = 2s$
$z = 3 + t$	$z = -2 + s$

Solución

Como en este caso se conocen las rectas, es posible identificar sus vectores directores y un punto sobre cada una de éstas.

Recta I

$\vec{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ y pasa por el punto $P_1\,(1, 1, 3)$

Recta II

$\vec{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ y pasa por el punto $P_2\,(3, 0, -2)$

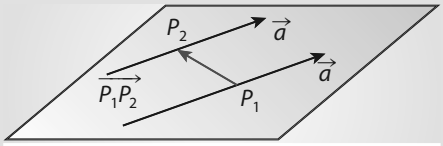


Figura 1.16

La ecuación del plano tiene la forma:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Para poder encontrar la ecuación del plano es necesario tener su vector normal, lo que se consigue obteniendo un segundo vector (además de los vectores directores de las rectas), el cual se obtiene al restar los dos puntos entre las rectas paralelas:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$$

Con el vector director de las rectas.

$$\vec{a} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

el vector normal se encontrará como sigue:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{i}}(-1+10) - \hat{\mathbf{j}}(2+5) + \hat{\mathbf{k}}(4+1)$$

$$\vec{N} = 9\hat{\mathbf{i}} - 7\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$$

Sustituyendo en la ecuación del plano y usando un punto de la recta (por ejemplo, el de la recta 2) se tiene:

$$P_2\,(3, 0, -2)$$

$$9\,(x - 3) - 7y + 5\,(z + 2) = 0$$

$$9x - 27 - 7y + 5z + 10 = 0$$

$$9x - 7y + 5z = 17$$

1.19 Encontrar una ecuación del plano que contiene a (2, 4, 8) y es perpendicular a la recta $x = 10 - 3t$, $y = 5 + t$, $z = 6 - \left(\frac{1}{2}\right)t$.

Solución

De la recta dada se puede identificar su vector director:

$$a = \left\langle -3, 1, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Si la recta es perpendicular al plano, entonces el vector director debe ser normal al plano; por tanto, de la ecuación del plano se tiene que:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Sustituyendo directamente el vector normal y el punto (2, 4, 8) en el plano, es posible escribir:

$$-3(x-2)+(y-4)-\frac{1}{2}(z-8)=0$$

$$-3x+6+y-4-\frac{z}{2}+4=0$$

$$-3x+y-\frac{z}{2}=-6$$

$$-6x+2y-z=-12$$

Nota importante acerca de rectas y planos

Como se ha visto hasta aquí, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$x = x_1 + a_1 t$$
$$y = y_1 + a_2 t$$
$$z = z_1 + a_3 t$$

y las correspondientes rectas simétricas son:

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}$$

donde,

$$a_2(x - x_1) = a_1(y - y_1)$$
$$a_3(x - x_1) = a_1(z - z_1)$$
$$a_3(y - y_1) = a_2(z - z_1)$$

Cada una de estas expresiones representa la ecuación de un plano que contiene a la recta *l*, representada por las ecuaciones paramétricas o simétricas. De esta manera, existe un número ilimitado de planos que contienen a una recta dada; sin embargo, una recta es determinada por al menos dos planos que se cortan; así, se puede concluir que hay un número ilimitado de pares de ecuaciones que representan a una recta.

1.20 Dados dos planos, $x+3y-z-9=0$ y $2x-3y+4z+3=0$, obtener para la recta de intersección de ambos planos:

a) Un conjunto de ecuaciones simétricas.

b) Un conjunto de ecuaciones paramétricas.

c) Los cosenos directores de un vector, cuyas representaciones sean paralelas al mismo.

Solución

a) La intersección de ambos planos se puede hallar si se combinan las ecuaciones en alguna de sus variables. Esto se logra mediante dos maneras diferentes de encontrar las ecuaciones simétricas mencionadas en la nota anterior:

- Resolviendo las ecuaciones de los planos para x, y, z comunes. Sumando las ecuaciones de los planos (para eliminar la variable y).

$$\begin{array}{rrrrrrrrl} x & + & 3y & - & z & - & 9 & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & 4z & + & 3 & = & 0 \quad (+) \\ \hline 3x & & & + & 3z & - & 6 & = & 0 \end{array}$$

- Resolviendo para x:

$$x=-z+2$$

- Multiplicando por -2 la primera ecuación del plano y sumando con la segunda ecuación (para eliminar la variable x):

$$\begin{array}{rrrrrrrrl} -2x & - & 6y & + & 2z & + & 18 & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & 4z & + & 3 & = & 0 \\ \hline & - & 9y & + & 6z & + & 21 & = & 0 \end{array}$$

Resolviendo para y:

$$y=\frac{2}{3}z+\frac{7}{3}$$

Igualando en z:

$$\frac{x-2}{-1}=z \qquad\qquad \frac{y-\frac{7}{3}}{\frac{2}{3}}=z$$

donde se obtienen las ecuaciones simétricas:

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-\frac{7}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{z-0}{1}$$

b) Las ecuaciones paramétricas se obtienen igualando las simétricas a un parámetro t como sigue:

$$\frac{x-2}{-3}=t \qquad \frac{y-\frac{7}{3}}{2}=t \qquad \frac{z-0}{3}=t$$

$$x=2-3t \qquad y=\frac{7}{3}+2t \qquad z=3t$$

c) De las ecuaciones paramétricas anteriores se puede identificar al vector director como $\langle -3,2,3\rangle = \vec{a}$; luego, sus cosenos directores pueden ser calculados como:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{22} \qquad \cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{22}} \qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{22}} \qquad \cos\mu = \frac{3}{\sqrt{22}}$$

1.21 Si l_1 es la recta que pasa por A (1, 2, 7) y B (−2, 3, −4) y l_2 es la recta que pasa por C (2, −1, 4) y D (5, 7, −3), demostrar que l_1 y l_2 se cruzan y son oblicuas.

Solución

Para la recta 1 (l_1), el vector director se obtiene restando las coordenadas del punto B menos las del punto A. Por otra parte, usando el punto A como un punto en la recta se encuentran sus ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} = \langle -3,1,-11\rangle \text{ Tomando } A \text{ como } P_1 \\ x = 1-3t, \quad y = 2+t, \quad z = 7-11t\end{array}\right\} l_1$$

Para la recta 2 (l_2), el vector director se obtiene restando las coordenadas del punto D menos las del punto C. Por otra parte, usando el punto C como un punto en la recta se encuentran sus ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{CD} = \langle 3,8,-7\rangle \text{ Tomando a } C \text{ como } P_2 \\ x = 2+3s \quad y = -1+8s \quad z = 4-7s\end{array}\right\} l_2$$

Nótese que los vectores directores de cada recta no son perpendiculares (esto puede verificarse si el producto escalar entre ellos no es cero), además no son paralelos.

Es importante verificar que para que las rectas se crucen, debe haber un t y un s que den un punto P_1 (x, y, x) que satisfaga a ambas ecuaciones, para lo cual será necesario igualar las variables x, y y z en el par de ecuaciones paramétricas para encontrar el punto de intersección.

Igualando en x:

$$1 - 3t = 2 + 3s \qquad \textbf{(A)}$$

Igualando en y:

$$2 + t = -1 + 8s \qquad \textbf{(B)}$$

Igualando en z:

$$7 - 11t = 4 - 7s \qquad \textbf{(C)}$$

Resolviendo (A) y (B) se obtienen los valores de los parámetros:

$$s = \frac{8}{21} \qquad t = \frac{1}{21}$$

Luego, al sustituir estos valores en la ecuación (C), se nota que NO la satisfacen; por tanto, se puede concluir que las rectas NO se cortan, por tanto se cruzan y son oblicuas.

1.22 Hallar el punto de intersección del plano y la recta indicados.

$$2x - 3y + 2z = -7$$
$$x = 1 + 2t$$
$$y = 2 - t$$
$$z = -3t$$

Solución

Si la recta y el plano se cortan, entonces ambos deben compartir un punto común: $P(x, y, x)$. Para ello, es posible sustituir las ecuaciones paramétricas de la recta en el plano para encontrar un parámetro t que haga posible esta intersección, esto es,

$$2(1 + 2t) - 3(2 - t) + 2(-3t) = -7$$
$$2 + 4t - 6 + 3t - 6t = -7$$
$$t = -3$$

Los valores del punto de intersección se pueden hallar al sustituir el valor del parámetro t en las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$x = 1 - 6 = -5$$
$$y = 2 - (-3) = 5$$
$$z = -3(-3) = 9$$

Por tanto, el punto de intersección es:

$$P(-5, 5, 9)$$

1.23 Obtener ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos indicados.

$$5x - 4y - 9z = 8$$
$$x + 4y + 3z = 4$$

Solución

Resolviendo para un punto $P_1(x, y, z)$ común:

$$\begin{array}{rrrrr} 5x & - & 4y & - & 9z = 8 \\ x & + & 4y & + & 3z = 4 \\ \hline 6x & & & - & 6z = 12 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} 5x & - & 4y & - & 9z = 8 \\ -5x & - & 20y & - & 15z = -20 \\ \hline & & -24y & - & 24z = -12 \end{array}$$

Simplificando:

$$x - z = 2$$
$$y + z = 0.5$$

La intersección se da para una z común:

$$z=\frac{x-2}{1} \qquad z=\frac{-\left(y-\frac{1}{2}\right)}{1}$$

$$\frac{x-2}{1}=\frac{-\left(y-\frac{1}{2}\right)}{1}=\frac{z-0}{1}$$

1.24 Encontrar ecuaciones paramétricas para la recta que es paralela a los planos dados y que pasa por el punto indicado.

$$x+y-4z=2$$
$$2x-y+z=10$$
$$P\,(5,6,-12)$$

Solución

Si la recta es paralela a los planos dados, entonces el producto escalar entre los vectores normales a cada plano y el vector director de la recta es cero.

Si el vector director de la recta es:

$$\vec{a}=\langle a_1, a_2, a_3\rangle$$

entonces

$$\langle 1,1,-4\rangle\cdot\langle a_1, a_2, a_3\rangle=0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\langle 2,-1,1\rangle\cdot\langle a_1, a_2, a_3\rangle=0 \qquad \textbf{(2)}$$

De la ecuación (1):

$$a_1+a_2-4a_3=0$$

De la ecuación (2):

$$2a_1-a_2+a_3=0$$

Resolviendo se obtiene:

$$3a_1-3a_3=0$$
$$a_1=a_3 \qquad a_2=3a_1=3a_3$$

Recuérdese que las ecuaciones simétricas de la recta tienen la forma:

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}$$

Sustituyendo el punto $P\,(5, 6, -12)$ y la información encontrada de los productos escalares d, las ecuaciones (1) y (2) quedan así:

$$\frac{x-5}{a_1}=\frac{y-6}{3a_1}=\frac{z+12}{a_1}$$

$$\frac{x-5}{1}=\frac{y-6}{3}=\frac{z+12}{1}$$

donde las ecuaciones paramétricas son:

$$x=5+t$$
$$y=6+3t$$
$$z=-12+t$$

1.25 Demostrar que la recta $\frac{1}{2}(x-3)=\frac{1}{3}(y+2)=\frac{1}{4}(z+1)$ está en el plano $x-2y+z=6$.

Solución

Las ecuaciones paramétricas de la recta pueden escribirse como:

$$x=3+2t$$
$$y=-2+3t$$
$$z=-1+4t$$

El vector director de esta recta es:

$$\vec{a}=\langle 2, 3, 4\rangle$$

En este caso, el plano $x-2y+z=6$ tiene como vector normal:

$$\vec{N}=\langle 1,-2,1\rangle$$

En la figura 1.17 se aprecia que una recta se encuentra en un plano dado.

La condición requerida para que la recta se encuentre en el plano es que el producto escalar entre el vector normal al plano y el vector director de la recta sea cero, esto es,

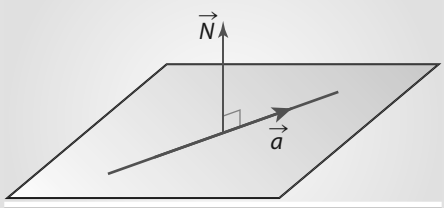


Figura 1.17

$$\vec{N}\cdot\vec{a}=0$$

$$\langle 1,-2,1\rangle\cdot\langle 2, 3, 4\rangle=2-6+4=0$$

Por tanto, se concluye que la recta se encuentra en el plano.

1.26 Calcular la distancia del punto $(-1, 3, 1)$ a la recta $x - 2z = 7$, $y = 1$.

Solución

En este caso, es más cómodo escribir las ecuaciones paramétricas de la recta haciendo la sustitución:

$$\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2t$$

$$z + \frac{7}{2} = t \Rightarrow z = t - \frac{7}{2}$$

$$y = 1$$

La figura 1.18 es un esquema de la distancia requerida, donde P_1 representa un punto sobre la recta y P_2 es el punto desde donde se requiere calcular esa distancia.

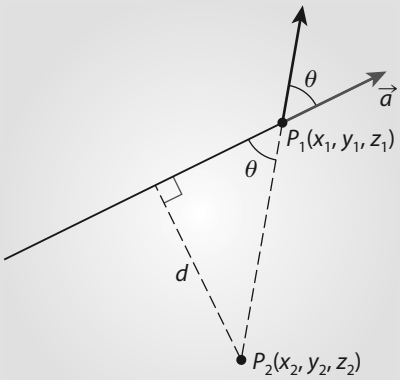


Figura 1.18

$$P_1 = \left(0, 1, -\frac{7}{2}\right)$$

$$P_2 = (-1, 3, 1)$$

$$\overrightarrow{P_2P_1} = \left(0, 1, -\frac{7}{2}\right) - (-1, 3, 1) = \left(1, -2, -\frac{9}{2}\right)$$

La distancia solicitada se puede hallar como sigue:

$$d = (\text{sen}\theta)\left|\overrightarrow{P_2P_1}\right|$$

A partir de la definición de producto vectorial es posible plantear el producto cruz entre los vectores $\overrightarrow{P_2P_1}$ y $\vec{a}$ como sigue:

$$\left\|\overrightarrow{P_2P_1} x \vec{a}\right\| = \left|\overrightarrow{P_2P_1}\right|\left|\vec{a}\right| \text{sen}\,\theta$$

$$d = \frac{\overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{a}}{\vec{a}} = \frac{\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & -2 & -\frac{9}{2} \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{5}} = \frac{\left\|-2\hat{\mathbf{i}} - 10\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}\right\|}{\sqrt{5}} = \sqrt{24} = 4.89$$

1.27 Determinar los valores de k para los cuales la intersección del plano $x + ky = 1$ y el hiperboloide elíptico de dos hojas $y^2 - x^2 - z^2 = 1$ es:

a) una elipse.

b) una hipérbola.

Solución

La intersección entre las superficies se puede hallar igualando las ecuaciones correspondientes, en donde la ecuación resultante de esa operación es la curva común entre ambos sólidos.

Las ecuaciones del hiperboloide y del plano son, respectivamente,

$$y^2 - x^2 - z^2 = 1 \qquad \textbf{(1)}$$

$$x + ky = 1 \qquad \textbf{(2)}$$

Sustituyendo (2) en (1) se tiene

$$y^2 - 1 + 2ky - k^2y^2 - z^2 = 1$$

$$y^2(1 - k^2) + 2ky - z^2 = 2 \qquad \textbf{(3)}$$

Caso I

La intersección es una elipse

Los signos de z^2 y y^2 deben ser iguales, para lo cual es posible hacer:

$$1 - k^2 = -a,\ a > 0 \qquad \textbf{(A)}$$

Sustituyendo en (3):

$$-ay^2 + 2ky - z^2 = 2$$

$$-y^2 + \frac{2ky}{a} - \frac{z^2}{a} = \frac{2}{a}$$

$$y^2 - \frac{2ky}{a} + \frac{z^2}{a} = \frac{-2}{a}$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto:

$$\left(y - \frac{k}{a}\right)^2 + \frac{z^2}{a} = \frac{-2}{a} + \frac{k^2}{a^2} \qquad \textbf{(B)}$$

Por tanto, para que sea una elipse debe cumplirse que:

$$-\frac{2}{a} + \frac{k^2}{a^2} > 0$$

Pero como $a = k^2 - 1$, véase la ecuación (A), donde $k^2 - 1 > 0$ se cumple en el intervalo:

$$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \qquad \textbf{(C)}$$

Sustituyendo en la desigualdad anterior se tiene:

$$\frac{-2}{k^2 - 1} + \frac{k^2}{(k^2 - 1)^2} > 0$$

La solución de esta desigualdad racional es:

$$\frac{-2k^2+2+k^2}{(k^2-1)^2}>0$$

$$\frac{2-k^2}{(k^2-1)^2}>0 \Rightarrow \frac{\left(\sqrt{2}-k\right)\left(\sqrt{2}+k\right)}{\left[(k-1)(k+1)\right]^2}>0 \Rightarrow \left(\sqrt{2}-k\right)\left(\sqrt{2}+k\right)>0$$

Para que lo anterior sea cierto es necesario analizar los signos de los factores en la desigualdad.

En la figura 1.19 aparecen los signos de cada factor. El intervalo solución es el que cumpla con ser positivo después de multiplicar todos sus factores.

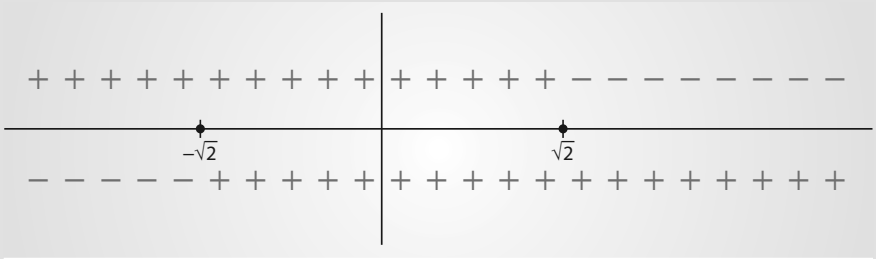


Figura 1.19 Signos de cada factor.

En este caso, el rango de solución es:

$$\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

Sin embargo, también debe cumplirse con la solución dada por (C), por tanto la solución será:

$$\left(-\sqrt{2},-1\right)\cup\left(1,\sqrt{2}\right) \Rightarrow 1<|k|<\sqrt{2}$$

Nota

Esta solución verifica que $\frac{-2}{a}+\frac{k^2}{a^2}>0$. De las ecuaciones (A) y (B), respectivamente, es posible observar que entre $1<|k|<\sqrt{2}$ el signo de *a* no cambiará, con lo que se puede estar seguros que este intervalo cumple con los requerimientos de una elipse.

Caso II

La intersección es una hipérbola

Si la intersección es una hipérbola, entonces:

$$a=1-k^2, a>0 \qquad \textbf{(D)}$$

Sustituyendo en (3) se tiene:

$$ay^2-z^2+2ky=2$$

$$y^2-\frac{z^2}{z}+\frac{2k}{a}y=\frac{2}{a}$$

$$\left(y+\frac{k}{a}\right)^2-\frac{z^2}{a}=\frac{2}{a}+\frac{k^2}{a^2} \tag{4}$$

De lo anterior se puede notar que para que (4) sea una hipérbola es necesario que

$$\frac{2}{a}+\frac{k^2}{a^2}>0$$

$$\frac{2-k^2}{\left(1-k^2\right)^2}>0 \Rightarrow 2-k^2>0 \tag{5}$$

Del caso anterior, se puede notar que el intervalo de solución es:

$$\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

De lo anterior se deduce que para que siga siendo hipérbola, el signo de *a* siempre debe ser positivo. Por tanto, solo será necesario cumplir:

$$1-k^2>0$$

$$(1-k)(1-k)>0$$

En la figura 1.20 aparecen los signos de los factores de la desigualdad anterior.



Figura 1.20 Signos de cada factor.

Obsérvese que en este caso el conjunto solución es (−1, 1).

Como fue posible asegurarse, en el intervalo (−1, 1) *a* no cambiará de signo y siempre será hipérbola, no hay que preocuparse por lo que respecta al segundo miembro, ya que $\frac{2}{a}+\frac{k^2}{a^2}$ siempre será positivo, pues el intervalo (−1, 1) se encuentra contenido en la solución de la desigualdad (5).

Por tanto, para que la intersección de las superficies sea una hipérbola la solución será $-1<|k|<1$.

APLICACIONES A LA GEOMETRÍA

El siguiente conjunto de problemas resueltos muestra el potencial del uso de vectores en la prueba y análisis de demostraciones de teoremas conocidos de geometría plana por métodos vectoriales.

1.28 Demostrar que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

Solución

En la figura 1.21 se muestra un triángulo con el segmento que une los puntos medios de dos lados.

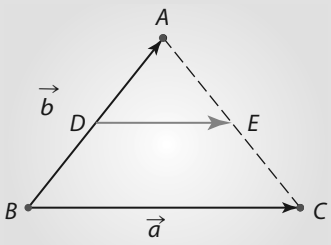


Figura 1.21

Del triángulo de la figura 1.21 se puede notar que:

$$\overrightarrow{BC} = \vec{a} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\overrightarrow{BA} = \vec{b} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$$

$$= -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a} \qquad \textbf{(3)}$$

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \qquad \textbf{(4)}$$

Por consiguiente, el segmento que une $\overrightarrow{DE}$ es:

$$\overrightarrow{DE} = B\vec{E} - \overrightarrow{BD}$$

$$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{BD}$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) - \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

1.29 Demostrar que las medianas de un triángulo se cortan en un punto que divide a cada mediana en la razón 2:1.

Solución

En la figura 1.22 se muestra un triángulo con sus medianas correspondientes.

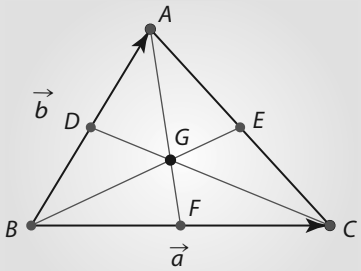


Figura 1.22

De la figura anterior se deduce lo siguiente:

$$\overrightarrow{BC} = \vec{a} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\overrightarrow{BA} = \vec{b} \quad \textbf{(2)}$$

$$\overrightarrow{CA} = \vec{b} - \vec{a} \quad \textbf{(3)}$$

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} \quad \textbf{(4)}$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$

Como *G* está en la mediana *BE*, existe un escalar *m* tal que:

$$\overrightarrow{BG} = m\,\overrightarrow{BE}$$

$$\overrightarrow{BG} = \frac{m}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \quad \textbf{(5)}$$

Como $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BA}$,

$$\overrightarrow{FA} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \quad \textbf{(6)}$$

Como *G* está sobre la mediana *FA*, existe un escalar *n* tal que

$$\overrightarrow{FG} = n\,\overrightarrow{FA}$$

$$\overrightarrow{FG} = n\left(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) \quad \textbf{(7)}$$

Pero $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG}$.

De (5) y (7):

$$\frac{m}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{\vec{a}}{2} + n\left(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)$$

Simplificando:

$$\frac{1}{2}(m + n - 1)\vec{a} + \left(\frac{m}{2} - n\right)\vec{b} = 0$$

Como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes,

$$m + n - 1 = 0 \quad \textbf{(A)}$$

$$\frac{m}{2} = n \quad \textbf{(B)}$$

Resolviendo:

$$m = \frac{2}{3}$$

$$n = \frac{1}{3}$$

Por tanto,

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} \qquad \text{Razón 2:1}$$

$$\overrightarrow{FG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FA}$$

1.30 Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se bisectan.

Solución

En la figura 1.23 se muestra un paralelogramo con sus diagonales correspondientes.

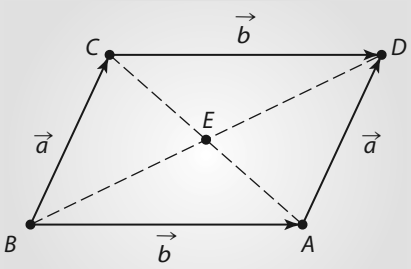


Figura 1.23

Del paralelogramo anterior se deduce lo siguiente:

$$\overrightarrow{BC} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{BA} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{BD} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$$

$$-\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{CA} \qquad \textbf{(2)}$$

Si E es el punto medio de BD, entonces

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}$$

$$\overrightarrow{CE} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

1.31 Demostrar que las alturas de un triángulo son concurrentes.

Solución

En la figura 1.24 se muestra un triángulo con sus alturas dadas.

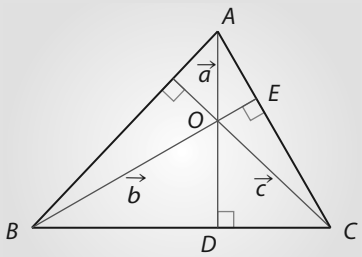


Figura 1.24

Sean AD y BE las alturas del triángulo ABC (solo dos alturas), y supóngase que se cortan en O.

De este modo, si:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$$

Entonces,

$$\overrightarrow{BC}+\vec{b}=\vec{c} \Rightarrow \overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b} \quad \textbf{(1)}$$

$$\vec{a}+\overrightarrow{AC}=\vec{c} \Rightarrow \overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a} \quad \textbf{(2)}$$

$$\vec{b}+\overrightarrow{BA}=\vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b} \quad \textbf{(3)}$$

Como

$$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=0 \quad \textbf{(4)}$$

es decir,

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b} \quad \textbf{(5)}$$

De modo similar,

$$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OB}=0$$

$$\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}\right)=0$$

$$\vec{c}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b} \quad \textbf{(6)}$$

De (6) y (5),

$$\vec{c}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Esto es,

$$\vec{c}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=0 \Rightarrow \overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$$

de modo que la altura de *C* con respecto a *AB* pasa por *O*; por tanto, se dice que las alturas son concurrentes.

1.32 En el tetraedro *OABC* que se muestra en la figura 1.25, la arista *OA* es perpendicular a la arista *BC* y la arista *OB* es perpendicular a *CA*. Mostrar que la arista *OC* es perpendicular a la arista *AB*.

Solución

Si $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ y $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, entonces $\overrightarrow{AB}+\vec{a}=\vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$,

$\overrightarrow{BC}+\vec{b}=\vec{c} \Rightarrow \overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$ y $\overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{c}$.

Como $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$,

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=0$$

es decir,

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b} \quad \textbf{(A)}$$

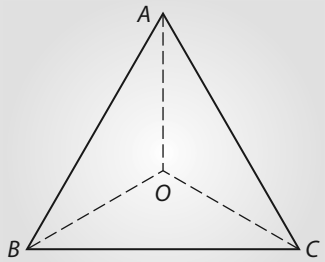


Figura 1.25

De modo similar, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{CA}$, entonces:

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{c} \qquad \textbf{(B)}$$

De (A) y (B),

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

De modo similar,

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$$

Esto implica:

$$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{BA}$$

Lo anterior completa la demostración.

1.33 Sea $\angle ABC$ un ángulo inscrito en un semicírculo con centro en O y radio $OA = OB = r$ (véase figura 1.26). Demostrar que un ángulo inscrito en un semicírculo es recto.

Solución

En la figura 1.26 se muestra el ángulo en cuestión inscrito en un semicírculo.

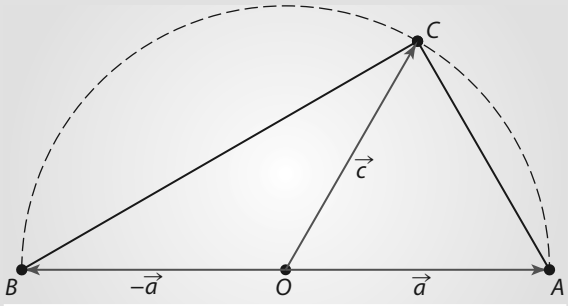


Figura 1.26

Si:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$$

entonces,

$$\overrightarrow{OB} = -\vec{a}$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$$

Como $a^2 = c^2 = r^2$,

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = \vec{c} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{a} = \underbrace{c^2 - a^2}_{\text{Escalares}} = 0$$

Como $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\cos ACB$

Si $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow ACB=\dfrac{\pi}{2}$, por tanto son ortogonales.

1.34 Demostrar el teorema de Apolonio, que establece que en un triángulo *ABC*, si *AD* es la mediana del lado *BC*, entonces:

$$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2=2\overrightarrow{AD}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2$$

Solución

En la figura 1.27 se muestra un ángulo inscrito en un semicírculo.

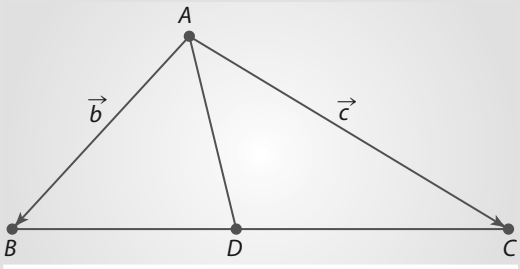


Figura 1.27

Sea:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b};\overrightarrow{AC}=\vec{c}$$

Entonces,

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right) \text{ y } \overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$$

Por tanto,

$$\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\frac{1}{4}\left(b^2+c^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}\right) \quad \textbf{(1)}$$

$$\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\vec{c}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=c^2+b^2-2\vec{b}\cdot\vec{c} \quad \textbf{(2)}$$

Así que:

$$2\overrightarrow{AD}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}^2=\frac{1}{2}\left(b^2+c^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}\right)+\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$$

$$=b^2+c^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2$$

1.35 Mostrar que si dos círculos se intersectan, la recta que une sus centros biseca perpendicularmente al segmento que une sus puntos de intersección.

Solución

En la figura 1.28 se muestran los círculos intersectados con la línea que une sus centros y su correspondiente segmento que une sus puntos de cruce.

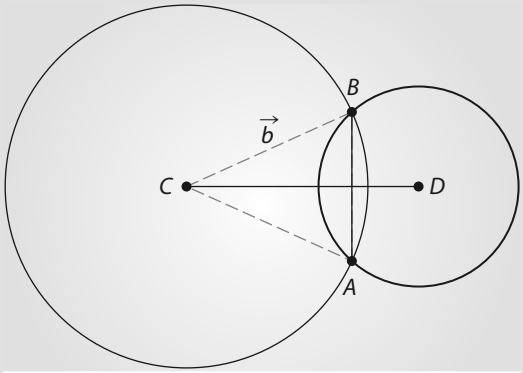


Figura 1.28

Del ΔABC,

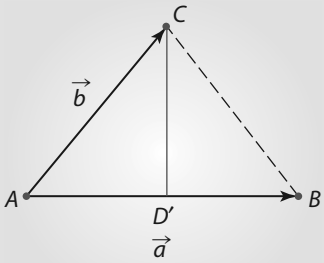


Figura 1.29

En este caso, primero se muestra que $\overline{CD^1}$ bisecta a $\overline{AB}$:

$$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$$

$$-\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{CB} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'C}=\vec{b} \qquad \textbf{(2)}$$

Respecto del círculo mayor, en éste se observa:

$$\left\|\overrightarrow{CB}\right\|=\left\|\vec{b}\right\|=\left\|\overrightarrow{CA}\right\|=\left\|\overrightarrow{CB}\right\| \qquad \textbf{(3)}$$

De (1):

$$\left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$$

$$=a^2+b^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Como $\|\overrightarrow{CB}\| = \|\vec{b}\|$ de (3):

$$b^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$a^2 = 2\vec{a}\cdot\vec{b} \qquad \textbf{(4')}$$

$$a^2 = 2ab\cos\theta$$

$$b\cos\theta = \frac{a}{2} \qquad (4) \quad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{AD^1} = \frac{\vec{a}}{2}$$

De (2):

$$\overrightarrow{D^1C} = \left(\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}\right) \qquad \textbf{(5)}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{D^1C} = (\vec{a})\cdot\left(\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}\right)$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{a^2}{2} \qquad \textbf{(6)}$$

De (4'):

$$a\cdot b = \frac{a^2}{2}$$

Sustituyendo en (6):

$$\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$$

1.36 Si las diagonales de un paralelogramo son ortogonales, demostrar que el paralelogramo es un rombo.

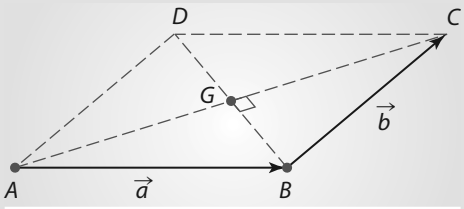


Figura 1.30

Solución

En la figura 1.30 se muestra un paralelogramo ABCD.

Así,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$$

$$\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{BD} \qquad \textbf{(2)}$$

Como $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

o bien,

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

$$b^2 - a^2 = 0$$

$$b = a$$

Como $|a| = |b|$, el paralelogramo es un rombo.

1.37 Demostrar que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.

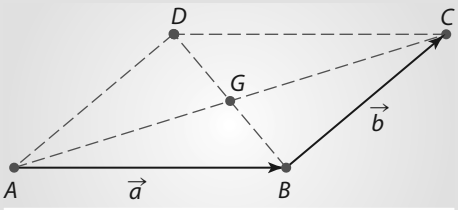


Figura 1.31

Solución

En la figura 1.31 se muestra un paralelogramo *ABCD*.

De la figura anterior se deduce que:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC} \quad \textbf{(1)}$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$$

$$\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{BD} \quad \textbf{(2)}$$

De (1):

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$

$$= a^2 + b^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{a} \quad \textbf{(3)}$$

De (2):

$$|\overrightarrow{BD}|^2 = (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

$$= b^2 + a^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{a} \quad \textbf{(4)}$$

Sumando (3) y (4),

$$\overrightarrow{BD}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = 2a^2 + 2b^2$$

1.38 Demostrar que la recta que une un vértice de un paralelogramo con el punto medio del lado opuesto divide a la diagonal con una razón 2:1.

Solución

En la figura 1.32 se muestra un paralelogramo *ABCD* con la recta que une el vértice *B* con el punto medio del lado *DC*.

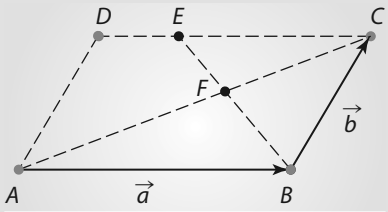


Figura 1.32

De la figura 1.32 se observa que:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AF}=m\,\overrightarrow{AC}, \text{ donde } m \text{ escalar} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\overrightarrow{FC}=n\,\overrightarrow{AC}, \text{ donde } n \text{ escalar} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{FE}$$

De (2):

$$n\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\frac{\vec{a}}{2}=\overrightarrow{FE} \qquad \textbf{(3)}$$

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BE}$$

$$\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2}=\overrightarrow{BE} \qquad \textbf{(4)}$$

$$\overrightarrow{FE}=L\,\overrightarrow{BE} \text{ donde } L \text{ escalar:} \qquad \textbf{(5)}$$

$$\overrightarrow{FE}=L\left(\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2}\right)$$

Sustituyendo en (3),

$$n\vec{a}+n\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2}=L\vec{b}-\frac{\vec{a}L}{2}$$

Simplificando, necesariamente se debe cumplir que:

$$\vec{a}\left(n-\frac{1}{2}+\frac{L}{2}\right)+\vec{b}(n-L)=0$$

$$n+\frac{(L-1)}{2}=0 \qquad \textbf{(A)}$$

$$n-L=0 \qquad \textbf{(B)}$$

Las ecuaciones anteriores representan los coeficientes de los vectores *a* y *b*; es decir, si una ecuación vectorial se cumple, entonces sus componentes son iguales.

Resolviendo (A) y (B),

$$n=\frac{1}{3}=L$$

Como:

$$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AC}$$
$$m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$$
$$m+n=1$$

Como $n=\frac{1}{3}$,

$$m=\frac{2}{3}$$

Observando,

$$\overrightarrow{FC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

La razón entre $\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FC}}=2$

1.39 Demostrar que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante de los tres vértices.

Solución

En la figura 1.33 se muestra un triángulo rectángulo con un segmento *AD*.

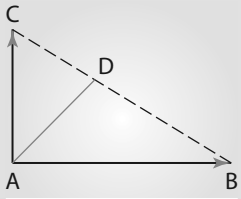


Figura 1.33

De la figura anterior se deduce que:

$$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$$

$$\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{BC} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\overrightarrow{AD}$$

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB} \qquad \textbf{(3)}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right) \qquad \textbf{(4)}$$

donde las magnitudes de $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{CD}$ son, respectivamente,

$$\|AD\|^2=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}\right) \qquad \textbf{(A)}$$

$$\|CD\|^2=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}\right) \qquad \textbf{(B)}$$

Como $\vec{b}\perp\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{b}\cdot\vec{c}=0$

de (A) y (B):

$$a^2+b^2=a^2+b^2$$

Capítulo

2

Funciones vectoriales



Problemas resueltos

A continuación se presentan los problemas para resolver con su solución detallada.

2.1 Trazar la gráfica de la ecuación vectorial y obtener una ecuación cartesiana.

$$\vec{R}(t)=t^2\hat{\mathbf{i}}+(t+1)\hat{\mathbf{j}}$$

Solución

Las ecuaciones paramétricas pueden identificarse como:

$$x=t^2 \qquad \textbf{(1)}$$

$$y=(t+1) \qquad \textbf{(2)}$$

De (2) se tiene:

$$t=y-1$$

Al elevar al cuadrado resulta:

$$t^2 = y^2 - 2y + 1 \qquad \textbf{(3)}$$

Sustituyendo (3) en (1) queda:

$$x = y^2 - 2y + 1$$

Por tanto, la ecuación cartesiana es:

$$x = (y-1)^2$$

Esta ecuación representa una parábola horizontal con vértice en (0, 1), como se observa en la figura 2.1.

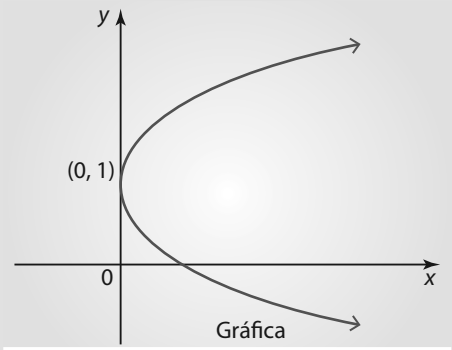


Figura 2.1

2.2 Trazar la gráfica de la ecuación vectorial y obtener una ecuación cartesiana.

$$\vec{R}(t) = \sec t\,\hat{\mathbf{i}} + \tan t\,\hat{\mathbf{j}} \text{ en } \left[-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi\right]$$

Solución

Las ecuaciones paramétricas están dadas por:

$$x = \sec t \qquad \textbf{(1)}$$

$$y = \tan t \qquad \textbf{(2)}$$

De la identidad $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$, al elevar al cuadrado (1) y (2) se tiene:

$$x^2 - y^2 = 1$$

Esta ecuación representa una hipérbola equilátera. Para $\left[-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi\right]$ solo corresponde una rama de la hipérbola (véase figura 2.2).

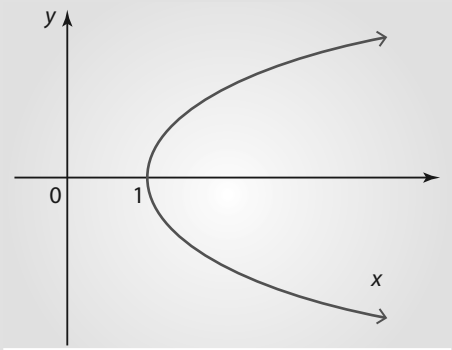


Figura 2.2

2.3 Obtener una ecuación de la recta tangente a la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 2\operatorname{sen} t$ y $y = 5\cos t$ en el punto donde $t = \frac{1}{3}\pi$.

Solución

La ecuación es de la forma:

$$y = mx + b$$

donde,

$$m = \frac{dy}{dx}$$

La derivada puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-5\operatorname{sen} t}{2\cos t}=-\frac{5}{2}\tan t$$

Evaluando en:

$$t=\frac{\pi}{3}$$

la pendiente puede escribirse así:

$$m=\frac{-5\sqrt{3}}{2}$$

Los valores de x y y para este punto son:

$$x=2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

$$y=5\cos\frac{\pi}{3}=\frac{5}{2}$$

Sustituyendo los valores anteriores en la ecuación de la recta $y=mx+b$ se tiene:

$$\frac{5}{2}=\left(-\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)+b$$

$$b=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}(3)=\frac{5}{2}(1+3)=4\left(\frac{5}{2}\right)=10$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y=-\frac{5\sqrt{3}}{2}\,x+10$$

2.4 Para las ecuaciones paramétricas dadas obtener las ecuaciones de las rectas tangentes horizontales calculando los valores de t para los cuales $\frac{dy}{dt}=0$ y hallar las ecuaciones de las rectas tangentes verticales encontrando los valores de t para los cuales $\frac{dx}{dt}=0$.

$$x=4t^2-4t$$

$$y=1-4t^2$$

Solución

La pendiente de las rectas tangentes se puede hallar así:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-8t}{8t-4}$$

La recta es tangente horizontal si $\frac{dy}{dt}=0$; es decir, para $t=0$ en el punto $P(0, 1)$, $\Rightarrow y=1$.

La recta es tangente vertical si $\frac{dx}{dt}=0$; es decir, $8t-4=0$. Por tanto, $t=\frac{1}{2}$ en el punto $Q(-1, 0)$.

Entonces la ecuación es:

$$x=-1$$

2.5 Mostrar de manera gráfica la diferencia entre los conjuntos indicados de ecuaciones paramétricas:

$$x=a\cos t \qquad y=a\,\text{sen}\,t \qquad a>0 \qquad 0\le t\le \pi \qquad \textbf{(1)}$$

$$x=a\,\text{sen}\,t \qquad y=a\cos t \qquad a>0 \qquad 0\le t\le \pi \qquad \textbf{(2)}$$

Solución

A partir de las ecuaciones (1) se puede escribir:

$$x^2+y^2=a^2(\text{sen}^2\,t+\cos^2 t)$$

Al obtener la ecuación cartesiana resulta:

$$x^2+y^2=a^2$$

De manera similar, la ecuación cartesiana a partir de las ecuaciones paramétricas (2) es:

$$x^2+y^2=a^2$$

Aunque las ecuaciones cartesianas resultantes son las mismas, los valores de las variables dependiente e independiente cambian por el tipo de parametrización. En la figura 2.3 se muestra el comportamiento de las ecuaciones (1) y en la figura 2.4 aparece la gráfica del conjunto de ecuaciones (2).

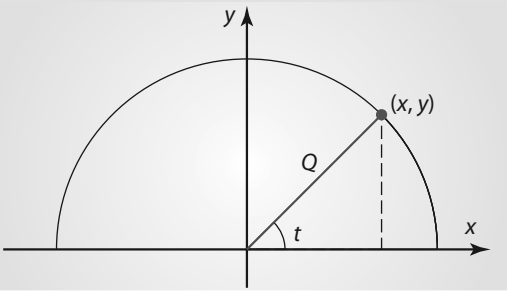


Figura 2.3

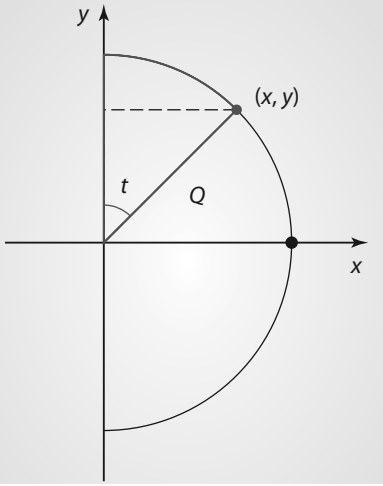


Figura 2.4

2.6 Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la curva dada en el valor del punto dado.

$$x=t^2+t \qquad \textbf{(1)}$$

$$y=t^2 \qquad \textbf{(2)}$$

en el punto $P(2, 4)$.

Solución

La ecuación es de la forma:

$$y = mx + b$$

donde,

$$m = \frac{dy}{dx}$$

La derivada se escribe como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{2t+1} \text{ para cualquier valor de } t \qquad \textbf{(3)}$$

Para el punto $P(2, 4)$, los valores del parámetro se obtienen al sustituir la coordenada x o y en alguna de las ecuaciones paramétricas.

Usando la coordenada en x se tiene que:

$$2 = t\,(t + 1)$$

$$0 = t^2 + t - 2$$

$$0 = (t + 2)\,(t - 1)$$

Nótese que existen dos valores del parámetro t que satisfacen la ecuación anterior; sin embargo, al evaluar en (2), la coordenada de y tiene dos valores:

En $t = -2$, $y = 4$

En $t = 1$, $y = 1$

Puesto que el valor del punto es (2, 4), el parámetro que se debe elegir es:

$$t = -2$$

Al sustituir este parámetro en la ecuación (3) se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(-2)}{2(-2)+1} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

y al sustituir los valores anteriores en la ecuación de la recta $y = mx + b$ resulta:

$$4 = \frac{4}{3}(2) + b$$

$$b = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}(x + 1)$$

2.7 Determinar el vector tangente unitario $\vec{T}(t)$ y además hallar $\vec{T}'(t)$ para la curva $\vec{R}(t)=e^t\hat{\mathbf{i}}+e^{-t}\hat{\mathbf{j}}$.

Solución

Recordar que el vector tangente unitario se define como:

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{R}'(t)}{\left\|\vec{R}'(t)\right\|} \qquad \textbf{(1)}$$

La derivada de la función vectorial se escribe de la siguiente manera:

$$\vec{R}'(t)=e^t\hat{\mathbf{i}}-e^{-t}\hat{\mathbf{j}}$$

El módulo del vector derivada es:

$$\left\|\vec{R}'(t)\right\|=\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}}=\sqrt{e^{2t}+\frac{1}{e^{2t}}}=\frac{\sqrt{e^{4t}+1}}{e^t}$$

Sustituyendo en (1) y al simplificar en cada componente resulta:

$$\vec{T}(t)=\frac{e^t\hat{\mathbf{i}}-e^{-t}\hat{\mathbf{j}}}{\frac{\sqrt{e^{4t}+1}}{e^t}}=\frac{e^{2t}}{\sqrt{e^{4t}+t}}\hat{\mathbf{i}}-\frac{1}{\sqrt{e^{4t}+1}}\hat{\mathbf{j}}$$

Derivando el vector anterior:

$$\vec{T}'(t)=\frac{\sqrt{e^{4t}+1}\,e^{2t}(2)-e^{2t}\frac{4}{2}\left(e^{4t}+1\right)^{-\frac{1}{2}}e^{4t}}{e^{4t}+1}\hat{\mathbf{i}}-\frac{0-\frac{1}{2}\left(e^{4t}+1\right)^{-\frac{1}{2}}4e^{4t}}{e^{4t}+1}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{T}'(t)=\frac{2e^{2t}\sqrt{e^{4t}+1}-2e^{6t}\left(e^{4t}+1\right)^{-\frac{1}{2}}}{e^{4t}+1}\hat{\mathbf{i}}+\frac{2e^{4t}\left(e^{4t}+1\right)^{-\frac{1}{2}}}{e^{4t}+1}\hat{\mathbf{j}}$$

Al final se puede escribir:

$$\vec{T}'(t)=\left[\frac{2e^{2t}}{\sqrt{e^{4t}+1}}-\frac{2e^{6t}}{\left(e^{4t}+1\right)^{\frac{3}{2}}}\right]\hat{\mathbf{i}}+\left[\frac{2e^{4t}}{\left(e^{2t}+1\right)^{\frac{3}{2}}}\right]\hat{\mathbf{j}}$$

2.8 Determinar el vector tangente unitario $\vec{T}(t)$ y el vector normal unitario $\vec{N}(t)$ de la siguiente función vectorial:

$$\vec{R}(t)=3\cos t\,\hat{\mathbf{i}}+3\operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{j}}$$

Solución

La derivada de la función vectorial se escribe como:

$$\vec{R}'(t)=-3\operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{i}}+3\cos t\,\hat{\mathbf{j}}$$

Por tanto, el módulo del vector derivada es:

$$\left\|\vec{R}'(t)\right\|=\sqrt{9\operatorname{sen}^2 t+9\cos^2 t}$$

o bien,

$$\left\|\vec{R}'(t)\right\| = 3$$

El vector tangente unitario está dado por:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{R}'(t)}{\left\|\vec{R}'(t)\right\|} = -\operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{i}} + \cos t\,\hat{\mathbf{j}}$$

Recuérdese que el vector normal unitario se define como:

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\left\|\vec{T}'(t)\right\|}$$

Entonces, la derivada del vector tangente unitario y su módulo se pueden escribir como:

$$\vec{T}'(t) = -\cos t\,\hat{\mathbf{i}} - \operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\left\|\vec{T}'(t)\right\| = \sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} = 1$$

Por tanto, el vector normal unitario es:

$$\vec{N}(t) = -\cos t\,\hat{\mathbf{i}} - \operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{j}}$$

2.9 Determinar $\vec{T}(t)$ y $\vec{N}(t)$ para las curvas cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\underbrace{x = \cos kt \qquad y = \operatorname{sen} kt}_{\text{paramétricas}}$$

Solución

En este caso la función vectorial asociada es:

$$\vec{R}(t) = \cos kt\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen} kt\,\hat{\mathbf{j}}$$

Por tanto, la derivada de la función vectorial y su módulo pueden escribirse como:

$$\vec{R}'(t) = (-\operatorname{sen} kt)k\,\hat{\mathbf{i}} + (\cos kt)(k)\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\left\|\vec{R}'(t)\right\| = \sqrt{k^2 \operatorname{sen}^2 kt + k^2 \cos^2 kt} = k$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{R}'(t)}{\left\|\vec{R}'(t)\right\|} = -\operatorname{sen} kt\,\hat{\mathbf{i}} + \cos kt\,\hat{\mathbf{j}}$$

y el vector normal unitario puede hallarse de la siguiente manera:

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\left\|\vec{T}'(t)\right\|} = \frac{-k\cos kt\,\hat{\mathbf{i}} - (\operatorname{sen} kt)k\,\hat{\mathbf{j}}}{k} = -\cos kt\,\hat{\mathbf{i}} - \operatorname{sen} kt\,\hat{\mathbf{j}}$$

2.10 Determinar los vectores tangente y normal unitarios para la función vectorial.

$$\vec{R}(t)=\ln\cos t\,\hat{\mathbf{i}}+\ln \operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{j}}$$

Solución

El vector tangente unitario se define como:

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{R}'(t)}{\left\|\vec{R}'(t)\right\|} \qquad (1)$$

La derivada de la función vectorial y su módulo se escriben como:

$$\vec{R}'(t)=\frac{1}{\cos t}(-\operatorname{sen} t)\hat{\mathbf{i}}+\frac{1}{\operatorname{sen} t}(\cos t)\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{R}'(t)=-\tan t\,\hat{\mathbf{i}}+\cot t\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\left\|\vec{R}'(t)\right\|=\sqrt{\tan^2 t+\frac{1}{\tan^2 t}}=\sqrt{\frac{\tan^4 t+1}{\tan t}}$$

Sustituyendo en (1) se obtiene:

$$\vec{T}(t)=\frac{-\tan^2 t}{\sqrt{\tan^4 t+1}}\hat{\mathbf{i}}+\frac{1}{\sqrt{\tan^4 t+1}}\hat{\mathbf{j}}$$

Por su parte, el vector normal unitario se define como:

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{\left\|\vec{T}'(t)\right\|} \qquad (2)$$

Al derivar el vector tangente unitario obtenido se puede escribir:

$$\vec{T}'(t)=\left\{\frac{\sqrt{\tan^4 t+1}\left[-2\tan t\sec^2 t\right]+\tan^2 t\left[\frac{1}{2}\left(\tan^4 t+1\right)^{-\frac{1}{2}}4\tan^3 t\sec^2 t\right]}{\tan^4 t+1}\right\}\hat{\mathbf{i}}$$

$$+\left\{\frac{\left[-\frac{1}{2}\left(\tan^4 t+1\right)^{-\frac{1}{2}}4\tan^3 t\sec^2 t\right]}{\tan^4 t+1}\right\}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{T}'(t)=\left[\frac{-2\tan^3 t\sec^2 t}{\sqrt{\tan^4 t+1}}+\frac{2\tan^5 t\sec^2 t}{\left(\tan^4 t+1\right)^{\frac{3}{2}}}\right]\hat{\mathbf{i}}-\left[\frac{2\tan^3 t\sec^2 t}{\left(\tan^4 t+1\right)^{\frac{3}{2}}}\right]\hat{\mathbf{j}}$$

Así, el módulo de la derivada del vector tangente unitario es:

$$\left\|\vec{T}'(t)\right\|=\left\{\left(\frac{4\tan^6 t\sec^4 t}{\tan^4 t+1}-\frac{8\tan^8 t\sec^4 t}{\left(\tan^4 t+1\right)^2}+\frac{4\tan^{10} t\sec^4 t}{\left(\tan^4 t+1\right)^3}\right)+\left(\frac{4\tan^6 t\sec^4 t}{\left(\tan^4 t+1\right)^3}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\frac{4\tan^6 t\sec^4 t}{\tan^4 t+1}\left(1-\frac{2\tan^2 t}{\tan^4 t+1}+\frac{\tan^4 t}{\left(\tan^4 t+1\right)^2}+\frac{1}{\left(\tan^4 t+1\right)^3}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2\tan^3 t\sec^2 t}{\sqrt{\tan^4 t+1}}\left\{\left(1-\frac{2\tan^2 t}{\tan^4 t+1}+\frac{1+\tan^4 t}{(1+\tan^4 t)^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2\tan^3 t\sec^2 t}{\sqrt{\tan^4 t+1}}\left(1-\frac{2\tan^2 t}{\tan^4 t+1}+\frac{1}{1+\tan^4 t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2\tan^3 t\sec^2 t}{\sqrt{\tan^4 t+1}}\left(1+\frac{1-2\tan^2 t}{1+\tan^4 t}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{2\tan^3 t\sec^2 t}{\sqrt{\tan^4 t+1}}\left(\frac{1+\tan^4 t+1-2\tan^2 t}{1+\tan^4 t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2\tan^3 t\sec^2 t}{\sqrt{\tan^4 t+1}}\left(\frac{1+\tan^4 t+1-2\tan^2 t}{1+\tan^4 t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2\tan^3 t\sec^2 t}{\sqrt{\tan^4 t+1}}\left(\frac{2+\tan^4 t-2\tan^2 t}{1+\tan^4 t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Sustituyendo en (2) resulta:

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}=\left[\frac{-\sqrt{1+\tan^4 t}}{\sqrt{2+\tan^4 t-2\tan^2 t}}+\frac{\tan^2 t}{\sqrt{1+\tan^4 t}\sqrt{2+\tan^4 t-2\tan^2 t}}\right]\hat{\mathbf{i}}$$
$$+\left[-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^4 t}\sqrt{2+\tan^4 t-2\tan^2 t}}\right]\hat{\mathbf{j}}$$

2.11 Determinar la curvatura y el radio de curvatura de la función $x=\text{sen}\,y$ en el punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{6}\pi\right)$.

Solución

En este caso es importante notar que la curva está expresada como una función de la forma:

$$x=f(y)$$

Asimismo, puede verse que la función no se encuentra parametrizada; no obstante, es posible hallar la curvatura a partir de su definición como:

$$k=\frac{d\phi}{ds} \qquad \textbf{(1)}$$

Además, la pendiente se determina como:

$$\frac{dx}{dy}=\cos y \qquad \textbf{(2)}$$

Lo anterior puede escribirse como (recuérdese que la pendiente es la tangente de la recta tangente a la función):

$$\tan\phi = \cos y$$

$$\phi = \tan^{-1}\cos y \qquad \textbf{(3)}$$

Derivando (3) con respecto de y se tiene:

$$\frac{d\phi}{dy} = \frac{1}{1+\cos^2 y}(-\operatorname{sen} y)$$

El diferencial del ángulo se escribe como:

$$d\phi = \frac{-\operatorname{sen} y}{1+\cos^2 y}\,dy = \frac{-\operatorname{sen} y}{1+\cos^2 y}\,dy \qquad \textbf{(4)}$$

Como se recordará, el diferencial de la longitud del arco se define como:

$$ds = \sqrt{1+\left[f'(y)\right]^2}\,dy \qquad \textbf{(5)}$$

Sustituyendo el valor de la derivada encontrada en (2) resulta:

$$ds = \sqrt{1+\cos^2 y}\,dy \qquad \textbf{(6)}$$

De (4), (6) y (1) se puede escribir:

$$k = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\left(\dfrac{-\operatorname{sen} y}{1+\cos^2 y}\right)dy}{\sqrt{1+\cos^2 y}\,dy} = \left|\frac{-\operatorname{sen} y}{(1+\cos^2 y)^{\frac{3}{2}}}\right|$$

$$k = \frac{-\operatorname{sen} y}{(1+\cos^2 y)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{evaluando en } y = \frac{\pi}{6}$$

$$k = 0.2159 \qquad \rho = \frac{1}{k} = 4.63$$

2.12 Determinar la curvatura y el radio de curvatura en el punto dado para la función $\vec{R}(t) = t^2\hat{\mathbf{i}} + (2t+1)\hat{\mathbf{j}}$.

Solución

El vector curvatura se define como:

$$\vec{k}(t) = \frac{\vec{T}(t)}{\left\|\vec{R}'(t)\right\|}$$

La derivada de la función vectorial está dada por:

$$\vec{R}'(t) = 2t\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} \qquad \textbf{(1)}$$

Por tanto, el módulo de la función vectorial es:

$$\left\|\vec{R}'(t)\right\| = \sqrt{4t^2+4} = 2\sqrt{t^2+1} \qquad \textbf{(2)}$$

El vector tangente unitario se halla como:

$$T(t)=\frac{\vec{R}'(t)}{\left\|\vec{R}'(t)\right\|}=\frac{2t\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}}{2\sqrt{t^2+1}}$$

$$T(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\hat{\mathbf{i}}+\frac{\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{t^2+1}} \qquad \textbf{(3)}$$

La derivada del vector tangente resulta de:

$$\vec{T}'(t)=\frac{\sqrt{t^2+1}-t\frac{1}{2}\left(t^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}2t}{t^2+1}\hat{\mathbf{i}}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\left(t^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}2t\right)}{t^2+1}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{T}'(t)=\frac{\sqrt{t^2+1}-t\frac{1}{2}\left(t^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}2t}{t^2+1}\hat{\mathbf{i}}-\frac{2}{2}t(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{T}'(t)=\left[\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}-\frac{t^2}{\left(t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\right]\hat{\mathbf{i}}-\frac{t(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{t^2+1}\hat{\mathbf{j}} \qquad \textbf{(4)}$$

Sustituyendo (2) y (4) en la definición del vector curvatura se tiene:

$$\vec{k}(t)=\left[\frac{1}{2(t^2+1)}-\frac{t^2}{2(t^2+1)^2}\right]\hat{\mathbf{i}}-\left[\frac{t}{2(t^2+1)^2}\right]\hat{\mathbf{j}}$$

Al simplificar queda:

$$\vec{k}(t)=\left[\frac{t^2+1-t^2}{2(t^2+1)^2}\right]\hat{\mathbf{i}}-\left[\frac{t}{2(t^2+1)^2}\right]\hat{\mathbf{j}}$$

Así, el vector curvatura se escribe como:

$$\vec{k}(t)=\frac{1}{2(t^2+1)^2}\hat{\mathbf{i}}-\frac{t}{2(t^2+1)}\hat{\mathbf{j}}$$

El módulo de la curvatura es:

$$\left\|\vec{k}(t)\right\|=\left[\frac{1}{4(t^2+1)^4}+\frac{t^2}{4(t^2+1)^4}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left\|\vec{k}(t)\right\|=\sqrt{\frac{t^2+1}{4(t^2+1)^4}}=\frac{1}{2(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Al final, el radio de curvatura se expresa como:

$$\rho=\frac{1}{\left\|\vec{k}(t)\right\|}=2\left(t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}$$

2.13 Hallar el módulo del vector curvatura k y el radio de curvatura correspondiente para la curva dada en las ecuaciones paramétricas $x=\frac{1}{1+t}$ y $y=\frac{1}{1-t}$ en $t=0$.

Solución

Recuérdese que el vector curvatura se define como:

$$\vec{k}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{\left\|\vec{R}'(t)\right\|} \tag{1}$$

La función vectorial correspondiente es:

$$\vec{R}(t)=\frac{1}{1+t}\hat{\mathbf{i}}+\frac{1}{1-t}\hat{\mathbf{j}}$$

El vector tangente unitario se obtiene como sigue:

$$\vec{R}'(t)=\frac{-1}{(1+t)^2}\hat{\mathbf{i}}+\frac{1}{(1-t)^2}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\left\|\vec{R}'(t)\right\|=\left[\frac{1}{(1+t)^4}+\frac{1}{(1-t)^4}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{(1-t)^4+(1+t)^4}{(1+t)^4(1-t)^4}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{(1+t)^4+(1+t)^4}}{(1+t)^2(1-t)^2} \tag{2}$$

$$\vec{T}(t)=\frac{-(1-t)^2}{\sqrt{(1-t)^4+(1+t)^4}}\hat{\mathbf{i}}+\frac{(1+t)^2}{\sqrt{(1-t)^4+(1+t)^4}}\hat{\mathbf{j}}$$

La derivada del vector tangente unitario se puede hallar de la forma:

$$\vec{T}'(t)=\frac{\sqrt{(1-t)^4+(1+t)^4}\,2(1-t)+4(1-t)^2\frac{1}{2}\left[(1-t)^4+(1+t^4)\right]^{-\frac{1}{2}}\left(-(1-t)^3+(1+t)^3\right)}{(1-t)^4+(1+t)^4}\hat{\mathbf{i}}$$

$$+\frac{2\sqrt{(1-t)^4+(1+t)^4}\,(1+t)-2(1+t)^2\left[(1-t)^4+(1+t)^4\right]^{-\frac{1}{2}}\left(-(1-t)^3+(1+t)^3\right)}{(1-t)^4+(1+t)^4}\hat{\mathbf{j}}$$

Para simplificar la derivada del vector tangente unitario es posible evaluar en $t=0$ para encontrar:

$$\vec{T}'(t)=\frac{2\sqrt{2}+2/\sqrt{2}(0)}{2}\hat{\mathbf{i}}+\frac{2\sqrt{2}-0}{2}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{T}'(t)=\sqrt{2}\hat{\mathbf{i}}+\sqrt{2}\hat{\mathbf{j}} \tag{3}$$

Evaluando $\left\|\vec{R}'(t)\right\|$ en $t=0$ se obtiene:

$$\left\|\vec{R}'(t)\right\|=\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{4}$$

Sustituyendo (3) y (4) en (1) se obtiene el vector curvatura como:

$$\vec{K}(0)=\frac{\left\|\vec{T}'(t)\right\|}{\left\|\vec{R}'(t)\right\|}=2\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}$$

El módulo del vector curvatura se escribe como:

$$\left\|\vec{K}(0)\right\|=2\sqrt{2}$$

El radio de curvatura es:

$$\rho=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

2.14 Determinar la curvatura y el radio de curvatura de la función $y = x^4 - x^2$.

Solución

Nótese que la función dada no está en forma paramétrica, por lo que es necesario hallar la curvatura a partir de la definición, la cual se escribe como:

$$k = \frac{d\phi}{ds} \tag{1}$$

donde la tangente del ángulo representa la derivada de la función, la cual se puede escribir como:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 2x \tag{2}$$

Asimismo, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\tan\phi = 4x^3 - 2x$$

$$\phi = \tan^{-1}(4x^3 - 2x) \tag{3}$$

En la ecuación (1) se puede ver que es necesario encontrar el diferencial del ángulo dado, el cual se puede hallar a partir de (3) de la siguiente manera:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{1+(4x^3-2x)^2}(12x^2 - 2)$$

$$d\phi = \frac{2(6x^2-1)}{1+(4x^3-2x)^2}\,dx \tag{4}$$

Es importante recordar aquí que el diferencial de la longitud de arco se define como:

$$ds = \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx \tag{5}$$

Sustituyendo (2) en la ecuación anterior se obtiene:

$$ds = \sqrt{1+\left[4x^3-2x\right]^2}\,dx$$

Por último, la curvatura se puede encontrar a partir de (4) y (5) en (1) como sigue:

$$K = \frac{\dfrac{2(6x^2-1)}{1+(4x^3-2x)^2}}{\sqrt{1+\left[(4x^3-2x)^2\right]}\,dx}$$

Así, el radio de curvatura es:

$$\rho = \frac{1}{K} = \frac{\left[1+(4x^3-2x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{2(6x^2-1)}$$

2.15 El centro de la circunferencia de curvatura C en un punto P se llama centro de curvatura en P. Demostrar que las coordenadas del centro de curvatura de una circunferencia en $P(x, y)$ están dadas por:

$$X_C = X - \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad Y_C = Y + \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Solución

En la figura 2.5 se muestra una función $f(x)$ con una circunferencia tangente a un punto dado $P(x, y)$. El radio de esta circunferencia se denomina radio de curvatura y las coordenadas del centro se denotan mediante el punto $O(h, k)$.

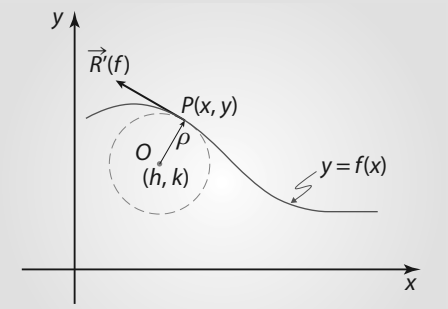


Figura 2.5

La pendiente de la recta OP se puede escribir como:

$$m_1 = \frac{y-k}{x-h}$$

La pendiente de la recta tangente en P está dada por:

$$m_2 = \frac{dy}{dx}$$

Como estas rectas son perpendiculares, sus pendientes deben cumplir con:

$$m_1 m_2 = -1 \qquad \textbf{(1)}$$

Por tanto, se puede escribir:

$$\left(\frac{y-k}{x-h}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) = -1 \qquad \textbf{(2)}$$

Además, la ecuación de una circunferencia con centro en (h, k) se puede escribir como:

$$(x-y)^2 + (y-k)^2 = \rho^2 \qquad \textbf{(3)}$$

Al elevar al cuadrado la ecuación (2) se tiene:

$$\frac{(y-k)^2}{(x-h)^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 \qquad \textbf{(4)}$$

donde:

$$(y-k)^2 = \frac{(x-h)^2}{\left[f'(x)\right]^2}$$

Sustituyendo en (3) resulta:

$$(x-h)^2 + \frac{(x-h)^2}{\left[f'(x)\right]^2} = \rho^2$$

Factorizando el término común se obtiene:

$$(x-h)^2\left[1+\frac{1}{\left[f'(x)\right]^2}\right]=\rho^2$$

o bien,

$$(x-h)^2=\frac{\rho^2\left[f'(x)\right]^2}{\left[1+\left[f'(x)\right]^2\right]}$$

Por tanto, la coordenada en x del centro de la circunferencia es:

$$h=x-\frac{\rho f'(x)}{\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}} \qquad \textbf{(5)}$$

Pero recuérdese que la curvatura está dada para una función en forma cartesiana como:

$$k=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad \textbf{(6)}$$

Asimismo, el radio de curvatura se define como:

$$\rho=\frac{1}{k} \qquad \textbf{(7)}$$

Al sustituir (6) en (7), y posteriormente el resultado de estas sustituciones en (5), se tiene:

$$h=x-\frac{\left[1+\left[f'(x)\right]^2\right]^{\frac{3}{2}}f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}\,\dfrac{d^2y}{dx^2}}=x-\frac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$$

Para encontrar la coordenada k del centro de la circunferencia, el proceso es análogo. Se deja como ejercicio determinar esta coordenada.

2.16 Trazar la gráfica correspondiente a la función vectorial $\vec{r}(t)=2\operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{i}}+4\cos t\,\hat{\mathbf{j}}+t\hat{\mathbf{k}}$ para $t\geq 0$.

Solución

Las ecuaciones paramétricas se pueden escribir como:

$$x=2\operatorname{sen} t \Rightarrow \frac{x}{2}=\operatorname{sen} t \qquad \textbf{(1)}$$

$$y=4\cos t \Rightarrow \frac{y}{4}=\cos t \qquad \textbf{(2)}$$

$$z=t \qquad \textbf{(3)}$$

Combinando (1) y (2) para eliminar el parámetro se obtiene:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow \text{ cilindro elíptico}$$

y combinando (2) y (3) se obtiene la ecuación de un cilindro cosenoidal de la forma:

$$y=4\cos z$$

En las figuras 2.6 y 2.7 se muestran las trazas en los planos *xy* y *zy* de ambos cilindros.

La gráfica de la curva en el espacio forma parte de ambos cilindros, por lo que está en la intersección de éstos.

En la figura 2.8 se muestra la curva como parte de ambas superficies.

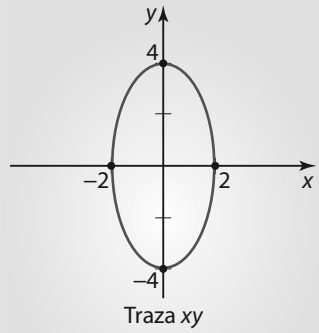


Figura 2.6

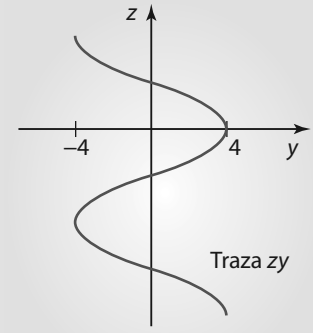


Figura 2.7

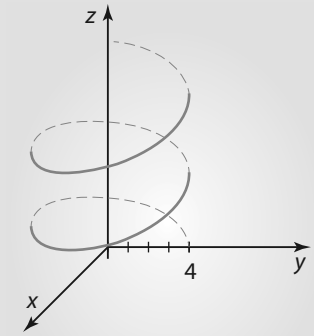


Figura 2.8

2.17 Trazar la gráfica correspondiente a la función vectorial $\vec{r}(t)=t\hat{\mathbf{i}}+2t\hat{\mathbf{j}}+\cos t\hat{\mathbf{k}}$, $t\geq 0$.

Solución

Las ecuaciones paramétricas se pueden escribir como:

$$x=t \quad \textbf{(1)}$$

$$y=2t \quad \textbf{(2)}$$

$$z=\cos t \quad \textbf{(3)}$$

Combinando (1) y (2) se obtiene:

$$y=2x \text{ (plano)}$$

Combinando (1) y (3) se obtiene:

$$z=\cos x \text{ (cilindro cosenoidal)}$$

La curva se encuentra en la intersección de ambas superficies.

En la figura 2.9 se muestran dichas superficies.

Por su parte, en la figura 2.10 se muestra la curva que representa la intersección de las superficies. Dicha curva en el espacio es la gráfica de la función vectorial que se pide.

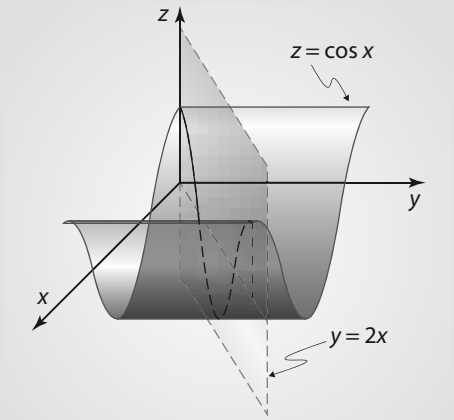


Figura 2.9

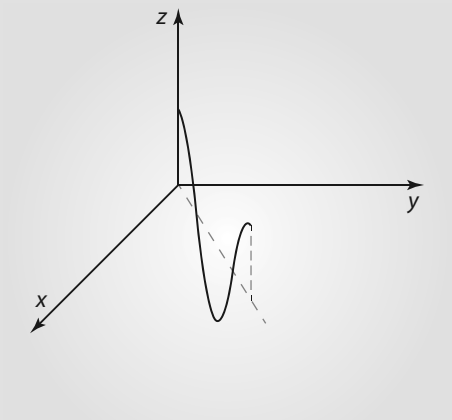


Figura 2.10

2.18 Trazar la gráfica de la curva C determinada por $\vec{r}(t)=\left(t^2+1\right)\hat{\mathbf{i}}+t\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}$.

Solución

Las ecuaciones paramétricas pueden escribirse como:

$$x=t^2+1 \qquad \textbf{(1)}$$

$$y=t \qquad \textbf{(2)}$$

$$z=3 \qquad \textbf{(3)}$$

Combinando (1) y (2) se obtiene:

$$x=y^2+1 \Rightarrow \text{cilindro parabólico}$$

De (3) se tiene,

$$z=3 \Rightarrow \text{plano}$$

En la figura 2.11 es posible observar las superficies.

En la figura 2.12 se ve la intersección de ambos sólidos, la cual representa la gráfica de la función vectorial solicitada.

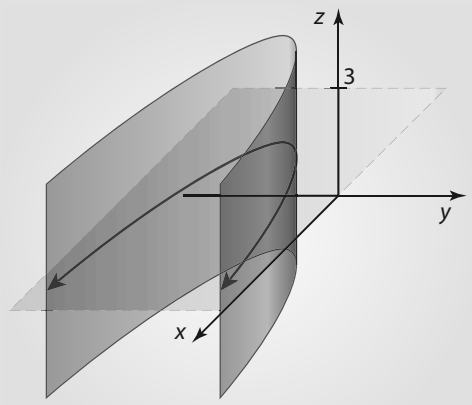


Figura 2.11

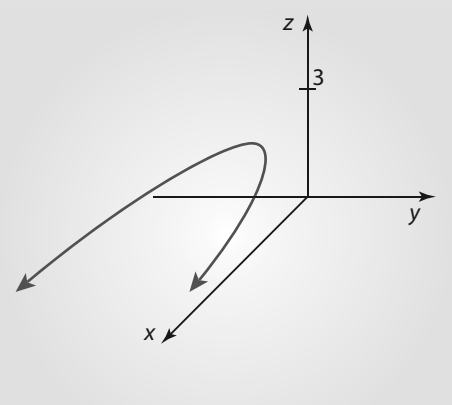


Figura 2.12

2.19 Determinar el vector tangente unitario a la función vectorial.

$$\vec{r}(t)=\left(t\cos t-\operatorname{sen} t\right)\hat{\mathbf{i}}+\left(t\operatorname{sen} t+\cos t\right)\hat{\mathbf{j}}+t^2\hat{\mathbf{k}}\,,\ t>0$$

Solución

La derivada de la función se escribe como:

$$\vec{r}\,'(t)=(-t\operatorname{sen} t)\hat{\mathbf{i}}+(t\cos t)\hat{\mathbf{j}}+2t\hat{\mathbf{k}}$$

La magnitud de la derivada se halla de la siguiente forma:

$$\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|=\sqrt{t^2\operatorname{sen}^2 t+t^2\cos^2 t+4t^2}=\sqrt{t^2(\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t+4)}$$

$$\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|=t\sqrt{5}$$

Por tanto, el vector tangente unitario es:

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}\,'(t)}{\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|}=\frac{-\operatorname{sen} t}{\sqrt{5}}\hat{\mathbf{i}}+\frac{\cos t}{\sqrt{5}}\hat{\mathbf{j}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\hat{\mathbf{k}}$$

2.20 Para la hélice circular $\vec{r}(t)=a\cos t\hat{\mathbf{i}}+a\operatorname{sen} t\hat{\mathbf{j}}+ct\hat{\mathbf{k}}$ ⇒ Hélice circular encontrar:

a) el vector tangente unitario $\vec{T}$

b) el vector normal unitario $\vec{N}$

c) la magnitud de la curvatura *K*.

Solución

La derivada de la función se escribe como:

$$\vec{r}\,'(t)=-a\operatorname{sen} t\hat{\mathbf{i}}+a\cos t\hat{\mathbf{j}}+c\hat{\mathbf{k}} \qquad \textbf{(1)}$$

El módulo de la derivada es:

$$\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|=\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t+a^2\cos^2 t+c^2}=\sqrt{a^2+c^2} \qquad \textbf{(2)}$$

El vector tangente unitario es:

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}\,'(t)}{\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|}=\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\left(-a\operatorname{sen} t\hat{\mathbf{i}}+a\cos t\hat{\mathbf{j}}+c\hat{\mathbf{k}}\right)$$

La derivada del vector tangente unitario está dada por:

$$\vec{T}\,'(t)=\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\left(-a\cos t\hat{\mathbf{i}}-a\operatorname{sen} t\hat{\mathbf{j}}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

El módulo se puede escribir como:

$$\left\|\vec{T}\,'(t)\right\|=\sqrt{\frac{a^2\cos^2 t+a^2\operatorname{sen}^2 t}{a^2+c^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} \qquad \textbf{(4)}$$

Por tanto, a partir de los resultados anteriores, el vector normal unitario está dado por:

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}=\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2+c^2}}\left(\frac{-a\cos t\hat{\mathbf{i}}-a\operatorname{sen} t\hat{\mathbf{j}}}{a}\right)=-\cos t\hat{\mathbf{i}}-\operatorname{sen} t\hat{\mathbf{j}}$$

Recuérdese que la curvatura se define como:

$$\vec{K}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \qquad \textbf{(5)}$$

Sustituyendo (2) y (3) en (5) se tiene:

$$\vec{K}(t)=\frac{\dfrac{-a\cos t\hat{\mathbf{i}}-a\operatorname{sen} t\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{a^2+c^2}}}{\dfrac{\sqrt{a^2+c^2}}{1}}=\frac{-a\cos t\hat{\mathbf{i}}-a\operatorname{sen} t\hat{\mathbf{j}}}{a^2+c^2}$$

La magnitud de la curvatura se obtiene de la siguiente manera:

$$\|\vec{K}(t)\|=\sqrt{\frac{a^2\cos^2 t+a^2\operatorname{sen}^2 t}{(a^2+c^2)^2}}=\frac{a}{a^2+c^2}$$

2.21 Obtener una ecuación del plano *osculador* de la curva en espacio dada en el punto *t* indicado.

La hélice circular $\vec{r}(t)=2\cos t\hat{\mathbf{i}}+2\operatorname{sen} t\hat{\mathbf{j}}+3t\hat{\mathbf{k}}$ en $t=\dfrac{\pi}{4}$.

Sugerencia: Véase el problema anterior 2.20.

Solución

El plano osculador es el que tiene por vector normal al vector binormal $\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$.

Por tanto, primero se calculan los vectores tangente y normal unitarios, respectivamente:

- **Vector tangente unitario**

$$\vec{r}'(t)=-2\operatorname{sen} t\hat{\mathbf{i}}+2\cos t\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}$$

$$\|\vec{r}'(t)\|=\sqrt{4\operatorname{sen}^2 t+4\cos^2 t+9}=\sqrt{13}$$

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}'(t)}{\|r'(t)\|}=\frac{1}{\sqrt{13}}\left(-2\operatorname{sen} t\hat{\mathbf{i}}+2\cos t\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$\vec{T}'(t)=\frac{1}{\sqrt{13}}\left(-2\cos t\hat{\mathbf{i}}-2\operatorname{sen} t\hat{\mathbf{j}}\right) \qquad \textbf{(1)}$$

$$\|\vec{T}'(t)\|=\sqrt{\frac{4\cos^2 t+4\operatorname{sen}^2 t}{13}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$$

- **Vector normal unitario**

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}=-\cos t\hat{\mathbf{i}}-\operatorname{sen} t\hat{\mathbf{j}} \qquad \textbf{(2)}$$

- **Vector binormal**

$$\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$$

$$\vec{B}=\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \dfrac{-2\operatorname{sen} t}{\sqrt{13}} & \dfrac{+2\cos t}{\sqrt{13}} & \dfrac{3}{\sqrt{13}} \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix}=\hat{\mathbf{i}}\left(\frac{3\operatorname{sen} t}{\sqrt{13}}\right)-\hat{\mathbf{j}}\left(\frac{3\cos t}{\sqrt{13}}\right)+\hat{\mathbf{k}}\left(\frac{2\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{13}}+\frac{2\cos^2 t}{\sqrt{13}}\right)$$

$$\vec{B}=\frac{1}{\sqrt{13}}\left(3\operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{i}}-3\cos t\,\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

Recuérdese que la ecuación de un plano tiene la forma:

$$a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)+c\left(z-z_0\right)=0 \qquad \textbf{(4)}$$

donde $\langle a, b, c\rangle$ representan las componentes de un vector normal al plano (en este caso es el vector binormal), y el punto (x_0, y_0, z_0) es un punto cualquiera sobre el plano; para encontrar ese punto solo es necesario sustituir el valor del parámetro en la función vectorial de la hélice circular como sigue:

En $t=\dfrac{\pi}{4}$:

$$x_0=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$$

$$x_0=2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$$

$$x_0=3\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}\pi$$

Para hallar el vector normal es posible sustituir el valor del parámetro en el vector binormal (3).

Tomando a $\vec{B}$ en $t=\dfrac{\pi}{4}$:

$$\vec{B}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{i}}-\frac{3}{\sqrt{3}}\vec{\mathbf{j}}+2k\right)$$

Sustituyendo en la ecuación del plano (4) se puede escribir:

$$\frac{3}{\sqrt{13}\sqrt{2}}\left(x-\sqrt{2}\right)+\left(-\frac{3}{\sqrt{13}\sqrt{2}}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\frac{2}{\sqrt{13}}\left(z-\frac{3}{4}\pi\right)=0$$

o bien,

$$\frac{3x}{\sqrt{13}\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{13}}-\frac{3y}{\sqrt{13}\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{13}}+\frac{2z}{\sqrt{13}}-\frac{3}{2}\pi=0$$

Simplificando, por fin se tiene la ecuación del plano osculador:

$$\frac{3}{\sqrt{26}}(x-y)+\frac{2z}{\sqrt{13}}=\frac{3}{2}\pi$$

Capítulo

3

Funciones de varias variables



Problemas resueltos

A continuación se presentan los problemas para resolver con su solución detallada.

3.1 Determinar el dominio de la función:

$$f(u,v)=\frac{uv}{u-2v}$$

Solución

La función existe para todos los pares (u, v), excepto cuando $u - 2v = 0$, lo que se escribe como:

Dominio $\{(u,v)|u\neq 2v\}$

3.2 Determinar el dominio de *f*:

$$f(x,y,z)=\sqrt{25-x^2-y^2-z^2}$$

Solución

La función existe cuando $25 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$, o bien cuando $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$, lo que se escribe como:

Dominio $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 25\}$

De manera gráfica, el dominio se concentra dentro de una esfera de radio 5.

3.3 Calcular el límite (si existe).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2}$$

Solución

El límite puede calcularse mediante la regla de las dos trayectorias:

a) Sean el eje x la primera trayectoria, donde $y = 0$. Al sustituir en el límite se obtiene:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

b) Sea el eje y la segunda trayectoria, donde $x = 0$. Al sustituir en el límite se obtiene:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-y^2}{2y^2} = -\frac{1}{2}$$

Nótese que como $\underset{\text{Trayectoria eje } x}{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)} \neq \underset{\text{Trayectoria eje } y}{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)}$ entonces el límite **no existe**.

3.4 Hallar el límite (si existe).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

Solución

Por regla de las dos trayectorias, sea:

a) A lo largo del eje $x \quad \Rightarrow \quad y = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$$

b) A lo largo del eje $y \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = 0$$

Por tanto, el límite de la función sí existe y es igual a cero.

3.5 Sea $W = 3x^2y^3z + 2xy^4z^2 - yz$. Hallar W_{xyz}.

Solución

La derivada respecto de x se escribe como sigue (considerando constante a y y z):

$$W_x = 6xy^3z + 2y^4z^2$$

La derivada W_x respecto de y se escribe:

$$W_{xy} = 18xy^2z + 8y^3z^2$$

Por último, la derivada W_{xy} respecto de z es:

$$W_{xyz} = 18xy^2 + 16y^3z$$

3.6 Sea $W = \operatorname{sen} xyz$. Hallar $\dfrac{\partial^3 W}{\partial z\ \partial y\ \partial x}$.

Solución

Las derivadas sucesivas se encuentran al considerar constantes a las variables con respecto a las que no se deriva, tal como se muestra a continuación:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = (\cos xyz)(yz)$$

Derivando como un producto se obtiene:

$$\frac{\partial w}{\partial y \partial x} = z\cos xyz + yz(-\operatorname{sen} xyz)(xz)$$

o bien,

$$\frac{\partial w}{\partial y \partial x} = z\cos xyz - xyz^2 \operatorname{sen} xyz$$

Así, la derivada respecto de z es:

$$\frac{\partial w}{\partial z \partial y \partial x} = \cos xyz + z(-\operatorname{sen} xyz)(xy) - \left[xyz^2 \cos xyz(xy) + \operatorname{sen} xyz(2xyz)\right]$$

o bien,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial z \partial y \partial x} &= \cos xyz - xyz \operatorname{sen} xyz - x^2y^2z^2 \cos xyz - 2xyz \operatorname{sen} xyz \\ &= \cos xyz\left(1 - x^2y^2x^2\right) - \operatorname{sen} xyz(xyz + 2xyz) \\ &= \cos xyz\left(1 - x^2y^2z^2\right) - 3xyz \operatorname{sen} xyz\end{aligned}$$

3.7 Sea $W = r^4 s^3 t - 3s^2 e^{rt}$. Verificar que $W_{rrs} = W_{rsr}$.

Solución

Las derivadas parciales en el orden dado son:

$$W_r = 4r^3 s^3 t - 3s^2 e^{rt} t$$
$$W_{rr} = 12r^2 s^3 t - 3s^2 e^{rt} t^2$$
$$W_{rrs} = 36r^2 s^2 t - 6st^2 e^{rt}$$

Derivando en forma similar se tiene:

$$W_{rs} = 12r^3 s^2 t - 6ste^{rt}$$
$$W_{rsr} = 36r^2 s^2 t - 6st^2 e^{rt}$$

Por tanto, se concluye que:

$$W_{rrs} = W_{rsr}$$

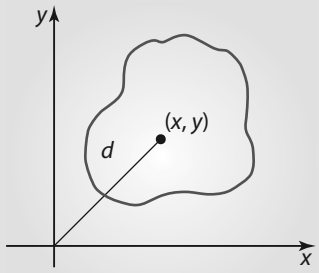
3.8 Una lámina de metal plana está situada en un plano xy y la temperatura, T, en °C en el punto (x, y) es inversamente proporcional a la distancia al origen.

a) Describir las isotermas.

b) Suponiendo que la temperatura en el punto $P(4, 3)$ es 40 °C, encontrar la ecuación de la isoterma a la temperatura correspondiente de 40 °C.

Solución

Supóngase que la placa es como la que se muestra en la figura 3.1.



(A) **Figura 3.1**

La distancia al origen se puede determinar como:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Por tanto, la temperatura se expresa,

$$T = \frac{K}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

donde K = constante

a) Las isotermas se encuentran cuando la temperatura permanece constante. Haciendo que $T = C$, con C = constante, se puede escribir:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{K}{C}$$

o bien,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = K'$$

Esta ecuación representa la ecuación de una circunferencia.

Las isotermas en la lámina representan zonas circulares de radio K' a temperatura constante.

b) En el punto $P(4, 3)$ y $T = 40$ °C, después de sustituir en (A) se tiene:

$$40 = \frac{K}{\sqrt{16+9}}$$

$$200 = K$$

Por tanto, se obtiene:

$$T = \frac{200}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Cuando $T = 40$ °C,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{200}{40}$$

o bien,

$$x^2 + y^2 = 25$$

Isoterma de radio 5.

3.9 Una lámina de metal plana se encuentra en un plano *xy,* y la temperatura, T, en (x, y) está dada por:

$$T = 10(x^2 + y^2)^2$$

donde:

$$T\ [°C] \text{ y } x \text{ y } y\ [\text{cm}]$$

a) Calcular la tasa de cambio o variación de T respecto a la distancia en el punto $(1, 2)$ en dirección del eje x.

b) Calcular la tasa de cambio o variación de T respecto a la distancia en el punto $(1, 2)$ en dirección del eje y.

Solución

a) En dirección del eje x, la derivada parcial se puede escribir como:

$$T_x = \frac{\partial T}{\partial x} = 20\left(x^2 + y^2\right)(2x)$$

$$T_x = 40(x^2 + y^2)(x)$$

Evaluando en el punto dado se tiene:

$$T_x = 40\ (1 + 4)(1)$$

$$T_x = 200\ (°C/\text{cm})$$

b) En dirección del eje *y*, la derivada se puede escribir como:

$$T_y = 20(x^2 + y^2)(2y)$$

$$T_y = 40(x^2 + y^2)(y) = 40(1+4)(2) = 400\ (°\text{C/cm})$$

3.10 El potencial eléctrico *V* en un punto (*x*, *y*, *z*) está dado por $V = \dfrac{100}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}$ donde *V* está en volts y *x*, *y*, *z* en centímetros.

a) Calcular la razón de cambio de *V* con respecto a la distancia en *P*(2, −1, 1) en la dirección del eje *x*.

b) Calcular la razón de cambio de *V* con respecto a la distancia en *P*(2, −1, 1) en la dirección del eje *y*.

c) Calcular la razón de cambio de *V* con respecto a la distancia en *P*(2, −1, 1) en la dirección del eje *z*.

Solución

En este caso, primero es necesario encontrar las derivadas parciales con respecto a cada una de las variables independientes:

a) En dirección del eje *x* se tiene:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = (100)(-1)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-2}(2x)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-200x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} = \frac{-200(2)}{(4+1+1)^2} = \frac{-400}{36} = \frac{-200}{18} = \frac{-100}{9}\ \frac{\text{V}}{\text{cm}}$$

b) En dirección del eje *y* se tiene:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = V_y = (100)(-1)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-2}(2y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{-200y}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} = \frac{-200(-1)}{(4+1+1)^2} = \frac{200}{36} = \frac{100}{18} = \frac{50}{9}\ \frac{\text{V}}{\text{cm}}$$

c) En dirección del eje *z* se tiene:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = (100)(-1)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-2}(2z) = \frac{-200z}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} = \frac{-200(1)}{36} = \frac{-200}{36} = \frac{-50}{9}\ \frac{\text{V}}{\text{cm}}$$

3.11 Cuando una chimenea de *h* metros de altura arroja humo que tiene un contaminante, la concentración *C*(*x*, *z*) en μg/cm^3 del contaminante en un punto a *x* kilómetros de la chimenea y a *z* metros de altura se puede obtener por:

$$C(x,z) = \frac{200}{x^2}\left[e^{-0.002\frac{(z-10)^2}{x^2}} + e^{-0.002\frac{(z+10)^2}{x^2}}\right]$$

Calcular e interpretar $\dfrac{\partial C}{\partial x}$ en el punto (2, 5).

Solución

La derivada parcial puede hallarse separando la función en dos sumandos y posteriormente derivando cada uno de ellos con la fórmula del cociente, como puede verse a continuación:

$$\frac{\partial C}{\partial x}=\frac{x^2\left[200e^{-0.002(z-10)^2x^{-2}}\,0.04(z-10)^2\,x^{-3}\right]-200e^{-0.002(z-10)^2x^{-2}}(2x)}{x^4}$$
$$+\frac{x^2\left[200e^{-0.002(z+10)^2x^{-2}}\,0.04(z+10)^2\,x^{-3}\right]-200e^{-0.002(z+10)^2x^{-2}}(2x)}{x^4}$$

Evaluando en el punto $P(2, 5)$, se tendrá:

$$\frac{\partial C}{\partial x}=-36.57\,\frac{\mu g}{m^3 km}$$

Esto indica que desde el punto (2, 5), en la dirección horizontal, la densidad de contaminante disminuye en 36.57 μg/m^3 por cada kilómetro avanzado.

3.12 En ingeniería civil, cuando se estudia la penetración de congelamiento en los caminos, la temperatura (T) al tiempo (t) en horas, y a cada profundidad de x metros, está dada aproximadamente por:

$$T=T_0e^{-\lambda x}\text{sen}\,(wt-\lambda x)$$

donde T_0, w y λ son constantes.

Calcular $\dfrac{\partial T}{\partial t}$.

Solución

Para la función dada:

$$T=T_0e^{-\lambda x}\text{sen}\,(wt-\lambda x)$$

la derivada parcial respecto del tiempo es:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=T_0e^{-\lambda x}\cos(wt-\lambda x)(w)$$

o bien,

$$\frac{\partial T}{\partial t}=T_0e^{-\lambda x}w\cos(wt-\lambda x)$$

3.13 La capacidad de los pulmones es el mayor volumen (en ml) que se puede exhalar después de una inhalación máxima de aire. Para un humano adulto común, V está dado aproximadamente por:

$$V=27.63\text{ y}-0.112xy$$

donde x es la edad (en años) y y la altura en centímetros.

a) Calcular e interpretar $\dfrac{\partial V}{\partial x}$.

b) Explicar por qué $\dfrac{\partial V}{\partial y}$ es difícil de interpretar.

Solución

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -0.112\,y$$

a) Significa la rapidez de cambio del volumen con la edad, manteniéndose a la misma estatura (condiciones normales).

b) $\dfrac{\partial V}{\partial y} = 27.63 - 0.112\,x$ difícil, ya que y (altura) normalmente es constante para un adulto.

3.14 Encontrar el gradiente de la función $f(x, y, z) = yz^3 - 2x^2$ en el punto $P(2, -3, 1)$.

Solución

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial\left(yz^3 - 2x^2\right)}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\left(yz^3 - 2x^2\right)}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\left(yz^3 - 2x^2\right)}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

En este caso, el gradiente es:

$$\vec{\nabla} f = -4x\hat{\mathbf{i}} + z^3\hat{\mathbf{j}} + 3yz^2\hat{\mathbf{k}}$$

Evaluando en el punto $P(2, -3, 1)$ se tiene:

$$\vec{\nabla} f(2, -3, 1) = -8\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + (-9)\hat{\mathbf{k}}$$

3.15 Encontrar el gradiente de $f(x, y) = e^{3x}\tan y$ en el punto $P\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Solución

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial\left(e^{3x}\tan y\right)}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\left(e^{3x}\tan y\right)}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\left(e^{3x}\tan y\right)}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\nabla} f = 3e^{3x}\tan y\,\hat{\mathbf{i}} + e^{3x}\sec^2 y\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\nabla} f\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = 3\tan 45°\,\hat{\mathbf{i}} + \sec^2 45°\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\nabla} f\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$$

3.16 Calcular la derivada direccional de $f(x, y) = x\cos^2 y$, en el punto $P\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$, en la dirección $\vec{a} = \langle 5, 1\rangle$.

Solución

La derivada direccional se puede escribir como:

$$D_u f(x, y) = f_x u_1 + f_y u_2$$

o bien,

$$D_u f(x,y) = \vec{\nabla f} \cdot \vec{u}$$

donde,

$$\vec{\nabla}(\ ) = \frac{\partial}{\partial_x}(\ )\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial_y}(\ )\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial_z}(\ )\hat{\mathbf{k}}$$

Entonces el gradiente resulta:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial\left(x\cos^2 y\right)}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\left(x\cos^2 y\right)}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\left(x\cos^2 y\right)}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\nabla} f = \cos^2 y\,\hat{\mathbf{i}} + 2x\cos y(-\operatorname{sen} y)\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\nabla} f = \cos^2 y\,\hat{\mathbf{i}} - 2x\operatorname{sen} y\cos y\,\hat{\mathbf{j}}$$

El vector que indica la dirección no es unitario, ya que su módulo no es la unidad. Por tanto, es necesario hallar el vector unitario como sigue:

$$\vec{a} = 5\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

$$\vec{u} = \frac{5}{\sqrt{26}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{26}}\hat{\mathbf{j}}$$

Por su parte, la derivada direccional se puede hallar de la siguiente manera:

$$D_u f(x,y) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} = \left(\cos^2 y\,\hat{\mathbf{i}} - 2x\operatorname{sen} y\cos y\,\hat{\mathbf{j}}\right)\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{26}}\hat{\mathbf{j}}\right)$$

Realizando el producto escalar se tiene:

$$D_u f[x,y] = \cos^2 y\left[\frac{5}{\sqrt{26}}\right] - \frac{2x\operatorname{sen} y\cos y}{\sqrt{26}}$$

Evaluando para el punto $P\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$ se tiene:

$$D_u f\left(2,\frac{\pi}{4}\right) = \cos^2 45\left[\frac{5}{\sqrt{26}}\right] - \frac{2(2)\operatorname{sen} 45\cos 45}{\sqrt{26}}$$

$$D_u f\left(2,\frac{\pi}{4}\right) = 0.49029 - 0.392232 = 0.098957$$

3.17 a) Calcular la derivada direccional de f en P, en la dirección de P a Q.

b) Encontrar un vector unitario en la dirección de máximo crecimiento de f en P y calcular la tasa de crecimiento de f en esa dirección.

c) Encontrar un vector unitario en la dirección en que f disminuye con mayor rapidez en P y calcular la razón de cambio de f en esa dirección.

Con $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $P(-2, 3, 1)$ y $Q(0, -5, 4)$.

Solución

a) El vector de P a Q se puede encontrar restando las coordenadas del punto final Q, menos las coordenadas del punto inicial P, para obtener:

$$\overrightarrow{PQ}=2\hat{\mathbf{i}}-8\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}$$

El módulo del vector es:

$$\|PQ\|=\sqrt{4+64+9}=\sqrt{77}$$

El vector unitario se escribe así: $\vec{u}=\dfrac{2}{\sqrt{77}}\hat{\mathbf{i}}-\dfrac{8}{\sqrt{77}}\hat{\mathbf{j}}+\dfrac{3}{\sqrt{77}}\hat{\mathbf{k}}$

De la definición de derivada direccional se tiene:

$$D_u f(x,y,z)=\vec{\nabla} f\cdot\vec{u}$$

El gradiente de la función se obtiene de la siguiente manera:

$$\vec{\nabla} f=\frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}+\frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\nabla} f=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}(2x)\hat{\mathbf{i}}+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}(2y)\hat{\mathbf{j}}+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}(2z)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\nabla} f=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{\mathbf{i}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{\mathbf{j}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\hat{\mathbf{k}}$$

Evaluando el gradiente en el punto dado se tiene:

$$\vec{\nabla} f(-2,\ 3,\ 1)=\frac{-2}{\sqrt{4+9+1}}\hat{\mathbf{i}}+\frac{3}{\sqrt{14}}\hat{\mathbf{j}}+\frac{1}{\sqrt{14}}\hat{\mathbf{k}}$$

Sustituyendo el gradiente y el vector unitario en la definición de derivada direccional se tiene:

$$D_u f(x,y,z)=\left(\frac{-2}{\sqrt{14}}\hat{\mathbf{i}}+\frac{3}{\sqrt{14}}\hat{\mathbf{j}}+\frac{1}{\sqrt{14}}\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{77}}\hat{\mathbf{i}}+\frac{8}{\sqrt{77}}\hat{\mathbf{j}}+\frac{3}{\sqrt{77}}\hat{\mathbf{k}}\right)$$

Desarrollando el producto escalar:

$$D_u f(x,y,z)\frac{-4}{\sqrt{1078}}-\frac{24}{\sqrt{1078}}+\frac{3}{\sqrt{1078}}=\frac{-25}{\sqrt{1078}}=-0.7614$$

b) Como $D_u f(x,y,z) = \nabla f \cdot \vec{u} = \|\nabla f\| \|\vec{u}\| \cos\theta$. Cuando $\cos\theta = 1$ se alcanza la rapidez máxima; es decir, cuando $\theta = 0°$. Por tanto, la rapidez máxima está dada por:

$$D_{u_{máx}} f(x,y,z) = \left\|\vec{\nabla} f\right\|$$

Del inciso a) se tiene:

$$\vec{\nabla} f = \frac{-2}{\sqrt{14}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\left\|\vec{\nabla} f\right\| = \sqrt{\frac{4}{14} + \frac{9}{14} + \frac{1}{14}} = 1$$

Tasa de crecimiento máxima.

Además, se puede escribir que la dirección de crecimiento máxima es:

$$\vec{u}_{\substack{\text{máxima}\\ \text{dirección}}} = \frac{-2}{\sqrt{14}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{\mathbf{k}}$$

c) El análisis es similar al inciso b), pero con signos opuestos, ya que ahora es necesario que se cumpla lo siguiente:

$$\cos\theta = -1$$

Entonces,

$$\left\|\vec{\nabla} f\right\| = -1$$

y la dirección de mínimo crecimiento es:

$$\vec{u} = \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{\mathbf{i}} - \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{\mathbf{j}} - \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{\mathbf{k}}$$

3.18 La temperatura, T, en el punto (x, y) de una placa colocada en el plano xy es inversamente proporcional a la distancia al origen. La temperatura en $P(3, 4)$ es 100 °C.

a) Calcular la razón de cambio de T en P en la dirección del vector $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$.

b) Determinar en qué dirección aumenta con mayor rapidez T en P.

c) Establecer en qué dirección disminuye con mayor rapidez T en P.

Solución

a) La temperatura puede modelarse como sigue:

$$T = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

donde k es una constante de proporcionalidad y depende del material de la placa. Esta constante se puede hallar a partir de valores conocidos de temperatura para algún punto en la placa. De este modo, sustituyendo los datos mencionados en la expresión de la temperatura:

en $P(3,4)$:

$$T = 100\ ^\circ\text{C}$$

Entonces,

$$k = 100\sqrt{9+16}$$

o bien

$$k = 500$$

La derivada direccional se define como:

$$D_u f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u}$$

La función temperatura es:

$$T = \frac{500}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

El gradiente de temperatura se encuentra de la siguiente forma:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial\left[\dfrac{500}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\left[\dfrac{500}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{-500}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}(2x)\hat{\mathbf{i}} + \frac{-500}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}(2y)\hat{\mathbf{j}}$$

Simplificando,

$$\vec{\nabla} f = \frac{-500x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{-500y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{\mathbf{j}}$$

Evaluando en el punto dado,

$$\vec{\nabla} f(3,4) = \frac{-500(3)}{(9+16)^{\frac{3}{2}}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{-500(4)}{(9+16)^{\frac{3}{2}}}\hat{\mathbf{j}} = 12\hat{\mathbf{i}} - 16\hat{\mathbf{j}}$$

El vector que define la dirección es:

$$\vec{a} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$$

El vector unitario se puede obtener de la siguiente manera:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\|\vec{u}\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{j}}$$

La derivada direccional se encuentra a partir de la definición como:

$$D_u f(x,y) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} = \left(-12\hat{\mathbf{i}} - 16\hat{\mathbf{j}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$D_u f(3,4) = \frac{-12}{\sqrt{2}} - \frac{16}{\sqrt{2}} = \frac{-28}{\sqrt{2}}$$

b) A partir del inciso a), las direcciones de máximo y mínimo crecimiento son:

$\vec{\nabla} f = -12\hat{\mathbf{i}} - 16\hat{\mathbf{j}}$ Dirección de máximo crecimiento

$-\vec{\nabla} f = 12\hat{\mathbf{i}} + 16\hat{\mathbf{j}}$ Dirección de mínimo crecimiento.

3.19 El potencial eléctrico V, en un punto $P(x, y, z)$ de un sistema de coordenadas rectangulares es:

$$V = x^2 + 4y^2 + 9z^2$$

a) Calcular la tasa de cambio de V en $P(2, -1, 3)$ en la dirección de P al origen.

b) Encontrar la dirección que produce la máxima tasa de cambio de V en P.

c) Determinar cuál es la máxima tasa de cambio de V en P.

Solución

a) La derivada direccional se define como:

$$D_u f(x,y,z) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u}$$

Entonces, se tiene:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial\left(x^2 + 4y^2 + 9z^2\right)}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\left(x^2 + 4y^2 + 9z^2\right)}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\left(x^2 + 4y^2 + 9z^2\right)}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\nabla} f = 2x\hat{\mathbf{i}} + 8y\hat{\mathbf{j}} + 18z\hat{\mathbf{k}}$$

El vector que le da dirección al punto P hacia el origen se escribe de la siguiente manera:

$$\vec{a} = -2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}} \text{ de } P \text{ al origen.}$$

El vector unitario se obtiene como sigue:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$$\vec{u} = -\frac{2}{\sqrt{14}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{\mathbf{j}} - \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{\mathbf{k}}$$

La derivada direccional es:

$$D_u f(x,y,z) = \left(2x\hat{\mathbf{i}} + 8y\hat{\mathbf{j}} + 18z\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\frac{-2}{\sqrt{14}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{\mathbf{j}} - \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{\mathbf{k}}\right)$$

Efectuando el producto escalar, se puede escribir

$$D_u f(x,y,z) = -\frac{4x}{\sqrt{14}} + \frac{8y}{\sqrt{14}} - \frac{54z}{\sqrt{14}}$$

Para $P(2,-1,3)$ se tiene:

$$D_u f(2,-1,3) = -\frac{4(2)}{\sqrt{14}} + \frac{8(-1)}{\sqrt{14}} - \frac{54(3)}{\sqrt{14}} = -\frac{8}{\sqrt{14}} - \frac{8}{\sqrt{14}} - \frac{162}{\sqrt{14}} = -\frac{178}{\sqrt{14}}$$

b) Del inciso a) se tiene:

$$\vec{\nabla} f = 2x\hat{\mathbf{i}} + 8y\hat{\mathbf{j}} + 18z\hat{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad \text{en } P(2,-1,3).$$

$$\vec{\nabla} f(2,-1,3) = 2(2)\hat{\mathbf{i}} + 8(-1)\hat{\mathbf{j}} + 18(3)\hat{\mathbf{k}} = 4\hat{\mathbf{i}} - 8\hat{\mathbf{j}} + 54\hat{\mathbf{k}}$$

c) La tasa de cambio en la dirección máxima $\left(\vec{\nabla} f\right)$ es:

$$\left\|\nabla f(x,y,z)\right\| = \sqrt{16 + 64 + 54^2} = 54.735$$

3.20 Considérese el plano que pasa por P y Q y es perpendicular al plano xy. Evaluar la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de este plano y la superficie dada en el punto indicado y en dirección hacia Q.

$$f(x,y) = (x-y)^2,\ P(4,2),\ Q(0,1)$$

Solución

El vector que va de P hacia Q se encuentra restando las coordenadas del punto final Q menos las del punto inicial P:

$$\overrightarrow{PQ} = -4\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$$

El módulo del vector es:

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

La pendiente de la recta tangente está dada por la siguiente derivada direccional:

$$D_u f(x,y) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial (x-y)^2}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial (x-y)^2}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}\right) \cdot \left(\frac{-4}{\sqrt{17}}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{\sqrt{17}}\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$D_u f(x,y) = 2(x-y)\hat{\mathbf{i}} + 2(x-y)(-1)\hat{\mathbf{j}} \cdot \left(\frac{-4}{\sqrt{17}}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{\sqrt{17}}\hat{\mathbf{j}}\right)$$

Efectuando el producto escalar,

$$D_u f(x,y) = \frac{-8(x-y)}{\sqrt{17}} + \frac{2(x-y)}{\sqrt{17}}$$

Evaluando,

$$D_u f(4,2)=\frac{-8(4-2)}{\sqrt{17}}+\frac{2(4-2)}{\sqrt{17}}=\frac{-16}{\sqrt{17}}+\frac{4}{\sqrt{17}}=\frac{-12}{\sqrt{17}}$$

3.21 Determinar las derivadas de $f(x, y) = x + y^2$ en (3, 4), en la dirección de un vector tangente a la gráfica de $2x^2 + y^2 = 9$ en el punto (2, 1).

Solución

La gráfica de $2x^2 + y^2 = 9$ representa una elipse con centro en el origen.

La dirección del vector tangente puede hallarse a partir de la derivada de la función, la cual se obtiene resolviendo para y de la ecuación de la elipse; es decir, despejando la variable dependiente:

$$y=\sqrt{9-2x^2}$$

Derivando con respecto de x se tiene:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(9-2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-4x)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{\sqrt{9-2x^2}}$$

Evaluando en el punto $P(2, 1)$ se obtiene:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2(2)}{\sqrt{9-2(4)}}=\frac{-4}{\sqrt{9-8}}=-4$$

Recordando que $m = \tan\theta = -4$ se tiene que,

$$\theta=-75.96°$$

El vector unitario puede hallarse como sigue:

$$\vec{u}=\cos\theta\hat{\mathbf{i}}+\text{sen}\,\theta\hat{\mathbf{i}}$$

$$\vec{u}=0.2425\hat{\mathbf{i}}+(-0.97014)\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{u}=0.2425\hat{\mathbf{i}}-0.97014\hat{\mathbf{j}}$$

De este modo, la derivada direccional está dada por:

$$D_u f(x,y)=\vec{\nabla}f\cdot\vec{u}=\left(\frac{\partial\left(x+y^2\right)}{\partial x}\hat{\mathbf{i}}+\frac{\partial\left(x+y^2\right)}{\partial y}\hat{\mathbf{j}}\right)\cdot\left(0.2425\hat{\mathbf{i}}-0.97014\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$D_u f(x,y)=\left(\hat{\mathbf{i}}+2y\hat{\mathbf{j}}\right)\cdot\left(0.2425\hat{\mathbf{i}}-0.97014\hat{\mathbf{j}}\right)$$

Al evaluar en el punto (3, 4) se tiene:

$$=0.2425-8(0.97014)$$

$$=-7.51862$$

3.22 Supóngase que $D_u f(a, b) = 7$ y $D_v f(a, b) = 3$, donde los vectores unitarios están dados por:

$$\vec{u} = \frac{5}{13}\hat{\mathbf{i}} - \frac{12}{13}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{v} = \frac{5}{13}\hat{\mathbf{i}} + \frac{12}{13}\hat{\mathbf{j}}$$

Evaluar $\vec{\nabla} f(a,b)$.

Solución

Las derivadas direccionales se definen como:

$$D_u f(a,b) = \vec{\nabla} f(a,b) \cdot \vec{u} \qquad \textbf{(1)}$$

$$D_u f(a,b) = \vec{\nabla} f(a,b) \cdot \vec{v} \qquad \textbf{(2)}$$

De la ecuación (1) se puede escribir:

$$7 = \left(a'\hat{\mathbf{i}} + b'\hat{\mathbf{j}}\right) \cdot \left(\frac{5}{13}\hat{\mathbf{i}} - \frac{12}{13}\hat{\mathbf{j}}\right)$$

en donde a' y b' representan las derivadas parciales de la función evaluadas en el punto (a, b). Al efectuar el producto escalar se tiene:

$$7 = \frac{5a'}{13} - \frac{12b'}{13}$$

$$91 = 5a' - 12b' \qquad \textbf{(3)}$$

De la ecuación (2),

$$3 = \left(a'\hat{\mathbf{i}} + b'\hat{\mathbf{j}}\right) \cdot \left(\frac{5}{13}\hat{\mathbf{i}} + \frac{12}{13}\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$3 = \frac{5a'}{13} + \frac{12b'}{13}$$

$$39 = 5a' + 12b' \qquad \textbf{(4)}$$

Resolviendo (3) y (4),

$$a' = 13 \text{ y } b' = -\frac{13}{6}$$

Por tanto, el gradiente es:

$$\vec{\nabla} f(a,b) = 13\hat{\mathbf{i}} - \frac{13}{6}\hat{\mathbf{j}}$$

3.23 Sea C la traza del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ en el plano $x = 1$. Obténganse las ecuaciones paramétricas para la recta tangente l a la curva C en $P(1, 2, 4)$.

Solución

El paraboloide, así como su traza, se muestran en la figura 3.2.

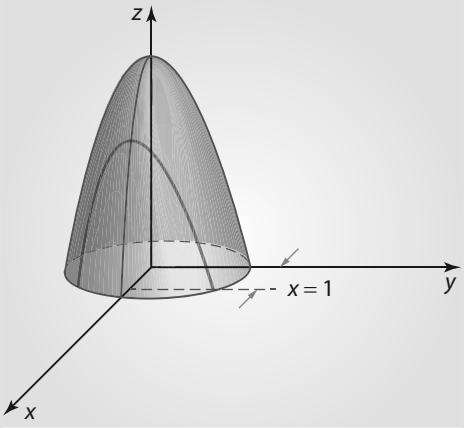


Figura 3.2

Si el plano pasa por $x = 1$, entonces la recta tangente está contenida en este plano, y la inclinación (el vector director) se puede encontrar a partir de la derivada parcial respecto de y, por lo que se puede encontrar la relación entre las componentes del vector director.

Sea $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \text{ en el punto } P(1, 2, 4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2(2) = -4 \Rightarrow \frac{a_3}{a_2} = -4 \Rightarrow a_3 = -4a_2 \quad \textbf{(1)}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta están dadas por:

$$x = x_1 + a_1 t \quad \textbf{(2)}$$

$$y = y_1 + a_2 t \quad \textbf{(3)}$$

$$z = z_1 + a_3 t \quad \textbf{(4)}$$

Sustituyendo el punto $P_1(1, 2, 4)$ en (4) y notando que la recta se intersecta en el plano xy cuando $z = 0$, se puede escribir:

$$t = \frac{-z_1}{a_3} = \frac{-4}{a_3} = \frac{-4}{-4a_2} = \frac{1}{a_2}$$

Por tanto, de (3) se tiene que:

$$y_2 = 2 + \frac{a_2}{a_2}$$

y se obtiene,

$$y_2 = 3$$

Por último, el punto de intersección en el plano xy puede escribirse como $P_2(1, 3, 0)$.

Para hallar el vector director de la recta solo es necesario restar las coordenadas de los puntos por los que pasa la recta; es decir, $P_1(1, 2, 4)$ y $P_2(1, 3, 0)$, como sigue:

$$a_1 = \langle 1 - 1 \rangle = 0$$

$$a_2 = \langle 3 - 2 \rangle = 1$$

$$a_3 = \langle 0 - 4 \rangle = -4$$

De este modo, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$x = 1$$

$$y = 2 + t$$

$$z = 4 - 4t$$

3.24 Obtener la ecuación del plano tangente a la gráfica de la ecuación dada en el punto dado:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9; P(-2, 2, 1)$$

Solución

Sea,

$$W(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$$

Recuérdese que el gradiente de la función W es un vector perpendicular a la superficie dada, por lo que este vector es normal al plano tangente a dicha superficie, es decir,

$$\vec{\nabla} W(x,y,z) = 2x\hat{\mathbf{i}} + 2y\hat{\mathbf{j}} + 2z\hat{\mathbf{k}}$$

Al evaluar en el punto dado se obtiene:

$\vec{\nabla} W(-2,2,1) = -4\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$. Este vector es normal a la superficie en $P(-2, 2, 1)$.

Entonces la ecuación del plano se define como:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

donde a, b y c son las componentes del vector normal y x_0, y_0 y z_0 representan las coordenadas de un punto dado $(-2, 2, 1)$.

Sustituyendo en la ecuación del plano se tiene:

$$-4x + 4y + 2z = 18$$

o bien, después de simplificar,

$$-2x + 2y + z = 9$$

3.25 Obtener la ecuación del plano tangente a la gráfica de la ecuación $x^2 - y^2 - 3z^2 = 5$, dada en el punto $(6, 2, 3)$.

Solución

En este caso, el vector normal en $P(6, 2, 3)$ es:

$$\vec{\nabla} W(x, y, z)$$

$$\vec{\nabla} W(x, y, z) = \frac{\partial\left(x^2 - y^2 - 3z^2 - 5\right)}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\left(x^2 - y^2 - 3z^2 - 5\right)}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\left(x^2 - y^2 - 3z^2 - 5\right)}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\nabla} W = 2x\hat{\mathbf{i}} - 2y\hat{\mathbf{j}} - 6z\hat{\mathbf{k}}$$

Evaluando en el punto $(6, 2, 3)$ se tiene:

$$\vec{\nabla} W(6,2,3) = 12\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} - 18\hat{\mathbf{k}}$$

De la ecuación del plano se tiene que:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Sustituyendo,

$$\vec{\nabla}W = 12\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} - 18\hat{\mathbf{k}}$$

y el punto $P(6, 2, 3)$ en la ecuación del plano:

$$12(x - 6) + (-4)(y - 2) + (-18)(z - 3) = 0$$
$$12(x - 6) - 4(y - 2) - 18(z - 3) = 0$$
$$12x - 72 - 4y + 8 - 18z + 54 = 0$$
$$12x - 4y - 18z = 10$$
$$6x - 2y - 9z = 5$$

3.26 Obtener la ecuación del plano tangente a la gráfica de la ecuación $z = \cos(2x + y)$ en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Solución

La función W se puede escribir:

$$W(x, y, z) = \cos(2x + y) - z$$

De este modo, el vector normal es el gradiente de W:

$$\vec{\nabla}W = \frac{\partial\left[\cos(2x+y)-z\right]}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\left[\cos(2x+y)-z\right]}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\left[\cos(2x+y)-z\right]}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\nabla}W = -\operatorname{sen}(2x+y)[2]\hat{\mathbf{i}} + \left(-\operatorname{sen}(2x+y)\right)[1]\hat{\mathbf{j}} + -\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\nabla}W = -2\operatorname{sen}(2x+y)\hat{\mathbf{i}} - \operatorname{sen}(2x+y)\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$$

Evaluando el gradiente en el punto dado (nótese que los ángulos están en radianes) se tiene:

$$\vec{\nabla}W\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{i}} - \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$$
$$= \frac{-2}{-\sqrt{2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$$
$$= \sqrt{2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$$

El vector gradiente anterior corresponde al vector normal a la superficie dada, además de que también es el vector perpendicular al plano tangente, cuya ecuación se escribe:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Sustituyendo el vector normal y el punto dado en la ecuación del plano,

$$\sqrt{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\left(z+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$$

Después de hallar los productos y simplificar se tiene:

$$\sqrt{2}x-\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{\sqrt{32}}-z-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

$$x-\frac{\pi}{2}+\frac{y}{2}-\frac{\pi}{8}-\frac{z}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}=0$$

Por último, se obtiene la ecuación del plano tangente:

$$x+0.5y-0.7071z=2.4634$$

3.27 Obtener una ecuación del plano tangente a la gráfica de la ecuación $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ dada en el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

Solución

La función *W* asociada se escribe:

$$W=\ln\left(x^2+y^2\right)-z$$

El gradiente de *W* es el vector normal:

$$\vec{\nabla}W(x,y,z)=\frac{1}{x^2+y^2}(2x)\hat{\mathbf{i}}+\frac{1}{x^2+y^2}(2y)\hat{\mathbf{j}}+(-1)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\nabla}W(x,y,z)=\frac{1}{x^2+y^2}(2x)\hat{\mathbf{i}}+\frac{1}{x^2+y^2}2y\hat{\mathbf{j}}+(-1)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\nabla}W(x,y,z)=\frac{2x}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{i}}+\frac{2y}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}}$$

Evaluando en el punto dado se tiene:

$$\vec{\nabla}W\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=\frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{i}}+\frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}}$$

El vector normal puede escribirse:

$$\vec{\nabla}W\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=\sqrt{2}\hat{\mathbf{i}}+\sqrt{2}\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}}$$

Sustituyendo en la ecuación del plano,

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

donde

$$\overrightarrow{N} = a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\sqrt{2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2}\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (-1)(z-0) = 0$$

$$\sqrt{2}x - 1 + \sqrt{2}y - 1 - z = 0$$

$$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - z = 2$$

3.28 Encontrar los puntos de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 7$, en los que el plano tangente sea paralelo al plano:

$$2x + 4y + 6z = 1$$

Solución

Sea,

$$W(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 7$$

El vector normal es:

$$\vec{\nabla} W(x, y, z) = 2x\hat{\mathbf{i}} + 2y\hat{\mathbf{j}} + 2z\hat{\mathbf{k}}$$

En algún punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, el vector normal es:

$$\vec{\nabla} W(x_0, y_0, z_0) = 2x_0\hat{\mathbf{i}} + 2y_0\hat{\mathbf{j}} + 2z_0\hat{\mathbf{k}}$$

La ecuación del plano se escribe:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

donde,

$$a = 2x_0;\ b = 2y_0;\ c = 2z_0$$

Los planos son paralelos si sus vectores normales difieren por un múltiplo escalar; es decir,

$$\overrightarrow{N}_1 = k\overrightarrow{N}_2$$

$$\overrightarrow{N}_1 = 2x_0\hat{\mathbf{i}} + 2y_0\hat{\mathbf{j}} + 2z_0\hat{\mathbf{k}}$$

$$\overrightarrow{N}_1 = 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}}$$

Por tanto, se puede escribir:

$$2x_0\hat{\mathbf{i}} + 2y_0\hat{\mathbf{j}} + 2z_0\hat{\mathbf{k}} = k\left(2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}}\right)$$

donde,

$$2x_0 = 2k \quad \Rightarrow \quad x_0 = k \qquad \textbf{(1)}$$

$$2y_0 = 4k \quad \Rightarrow \quad y_0 = 2k \qquad \textbf{(2)}$$

$$2z_0 = 6k \quad \Rightarrow \quad z_0 = 3k \qquad \textbf{(3)}$$

Pero como P_0 debe estar necesariamente en la superficie, el punto (x_0, y_0, z_0) está dado por el sistema (1), (2) y (3). Por tanto, los valores de las coordenadas del punto P_0 pueden sustituirse en la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 7$ de la siguiente manera:

$$k^2 + 4k^2 + 9k^2 = 7$$

$$14k^2 = 7$$

Donde,

$$k = \frac{1}{\pm\sqrt{2}}$$

De (1), (2) y (3) se tiene que:

$$x_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ o } x_o = \frac{1}{-\sqrt{2}}$$

$$y_0 = \sqrt{2} \text{ o } y_0 = -\sqrt{2}$$

$$z_o = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ o } z_o = \frac{3}{-\sqrt{2}}$$

Por tanto, los puntos de tangencia son:

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \text{ o bien,}$$

$$P\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, \frac{-3}{\sqrt{2}}\right)$$

3.29 Hallar los puntos de la superficie $x^2 + 4x + y^2 + z^2 - 2z = 11$ en los cuales el plano tangente es horizontal (paralelo al plano xy).

Solución

Para encontrar la ecuación del plano tangente primero es necesario hallar su vector normal, dado por el gradiente de la función.

Sea,

$$W(x, y, z) = x^2 + 4x + y^2 + z^2 - 2z - 11$$

Vector normal:

$$\vec{\nabla} W(x, y, z) = (2x + 4)\hat{\mathbf{i}} + (2y)\hat{\mathbf{j}} + (2z - 2)\hat{\mathbf{k}}$$

Si el plano es horizontal, el vector normal solo tendrá componente en la dirección k.

Por tanto, de las componentes del vector gradiente $\vec{\nabla} W(x, y, z)$ se tiene:

$$2x_0 + 4 = 0$$

$$x_0 = -2$$

$$y_0 = 0$$

Como el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ debe estar en la superficie, al sustituir los valores de x_0 y y_0 en la superficie dada,

$$x^2 + 4x + y^2 + z^2 - 2z = 11$$

Entonces se tiene:

$$4 - 8 + z^2 - 2z = 11$$

$$z^2 - 2z = 15$$

$$z^2 - 2z - 15 = 0$$

$$(z - 5)(z + 3) = 0$$

$$z_{01} = 5$$

$$z_{02} = -3$$

Por último, se concluye que los puntos donde el plano tangente es horizontal son:

$$P_0'(-2, 0, 5) \text{ y } P_0''(-2, 0, -3)$$

3.30 Demostrar que $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$ es la ecuación del plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0, z_0).

Solución

Sea $W(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ la función asociada al elipsoide para hallar el vector normal a la superficie.

El vector normal puede hallarse de la siguiente manera:

$$\vec{\nabla} W(x, y, z) = \frac{2x}{a^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{2y}{b^2}\hat{\mathbf{j}} + \frac{2z}{c^2}\hat{\mathbf{k}}$$

En el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ el gradiente es:

$$\vec{\nabla} W(x_0, y_0, z_0) = \frac{2x_0}{a^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{2y_0}{b^2}\hat{\mathbf{j}} + \frac{2z_0}{c^2}\hat{\mathbf{k}}$$

Entonces la ecuación del plano se escribe así:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Sustituyendo las componentes del vector normal obtenido antes, y las coordenadas del punto P_0 se tiene:

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$$

$$\frac{2x_0}{a^2}x - \frac{2x_0^2}{a^2} + \frac{2y_0}{b^2}y - \frac{2y_0^2}{b^2} + \frac{2z_0}{c^2}z - \frac{2z_0^2}{c^2} = 0$$

Simplificando,

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}$$

El segundo miembro debe cumplir la ecuación de la superficie en $P_0(x_0, y_0, z_0)$; por tanto, al sustituir en la ecuación del elipsoide se tiene:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$$

3.31 Demostrar que todo plano tangente a la gráfica de $z^2=x^2+y^2$ pasa por el origen.

Solución

Sea,

$$W(x, y, z)=x^2+y^2-z^2$$

El vector normal puede encontrarse mediante:

$$\vec{\nabla}W(x,y,z)=2x\hat{\mathbf{i}}+2y\hat{\mathbf{j}}-2z\hat{\mathbf{k}}$$

En $P_0(x_0, y_0, z_0)$,

$$\vec{\nabla}W(x_0,y_0,z_0)=2x_0\hat{\mathbf{i}}+2y_0\hat{\mathbf{j}}-2z_0\hat{\mathbf{k}}$$

De la ecuación del plano se tiene:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

Sustituyendo las componentes del vector normal en el plano anterior,

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+(-2z_0)(z-z_0)=0$$
$$2x_0x-2x_0^2+2y_0y-2y_0^2-2z_0z+2z_0^2=0$$
$$x_0x+y_0y-z_0z=x_0^2+y_0^2-z_0^2$$

En el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, la ecuación de la superficie, $z^2 = x^2 + y^2$, debe cumplirse. Entonces la ecuación del plano tangente es

$$x_0x+y_0y-z_0z=0$$

Como se deduce, puede verificarse fácilmente que este plano pasa por el origen si se encuentran las intersecciones en los ejes coordenados (éstas se dan en el origen).

3.32 Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta normal a la superficie dada en *P*.

Sean:

$$x^2+2y^2+z^2=4,\ P(1,-1,1)$$

Solución

Sea:

$$W(x, y, z)=x^2+2y^2+z^2-4$$

El vector normal se escribe así:

$$\vec{\nabla}W(x,y,z)=2x\hat{\mathbf{i}}+4y\hat{\mathbf{j}}+2z\hat{\mathbf{k}}$$

Evaluando en el punto $P(1,-1,1)$ se tiene:

$$\vec{\nabla}W(1,-1,1)=2\hat{\mathbf{i}}-4\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}}$$

Recuérdese que las ecuaciones paramétricas de la recta en el espacio son:

$$x=x_1+a_1t$$
$$y=y_1+a_2t$$
$$z=z_1+a_3t$$

Sustituyendo las coordenadas del vector normal y las del punto dado se tiene:

$$x=1+2t, \qquad y=-1-4t, \qquad z=1+2t.$$

3.33 Obtener las ecuaciones simétricas de la recta normal a la superficie $z=4x^2+9y^2+1$ en el punto $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},3\right)$.

Solución

Sea:

$$W(x, y, z)=4x^2+9y^2-z+1$$

El vector normal es:

$$\vec{\nabla}W=8x\hat{\mathbf{i}}+18y\hat{\mathbf{j}}-1\hat{\mathbf{k}}$$

Evaluando en el punto dado,

$$\vec{\nabla}W=4\hat{\mathbf{i}}+6\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}}$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$x=\frac{1}{2}+4t$$

$$y=\frac{1}{3}+6t$$

$$z=3-t$$

Eliminando el parámetro t se encuentra la ecuación simétrica de la recta:

$$t=\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{4}=\frac{\left(y-\frac{1}{3}\right)}{6}=\frac{(z-3)}{-1}$$

3.34 Se dice que dos superficies son ortogonales si sus vectores normales en un punto P son perpendiculares entre sí. Demostrar que las superficies dadas por $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ son ortogonales si y solo si:

$$F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0$$

Solución

Sea la primera superficie:

$$F(x, y, z) = 0$$

El vector normal es:

$$\vec{\nabla} F(x, y, z) = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

$$= F_x \hat{\mathbf{i}} + F_y \hat{\mathbf{j}} + F_z \hat{\mathbf{k}}$$

Sea la segunda superficie:

$$G(x, y, z) = 0$$

El vector normal es:

$$\vec{\nabla} G(x, y, z) = G_x \hat{\mathbf{i}} + G_y \hat{\mathbf{j}} + G_z \hat{\mathbf{k}}$$

Por tanto, dos vectores son ortogonales si:

$$\vec{\nabla} F(x, y, z) \cdot \vec{\nabla} G(x, y, z) = 0$$

Sustituyendo los vectores normales en la condición del producto escalar y desarrollando se tiene:

$$F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0$$

3.35 Encontrar los puntos del hiperboloide $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ en los que el plano tangente es paralelo al plano $4x - 2y + 4z = 5$.

Solución

Sea:

$$W(x, y, z) = x^2 - 2y^2 - 4z^2 - 16$$

El vector normal a un punto dado es:

$$\vec{\nabla} W(x, y, z) = 2x\hat{\mathbf{i}} - 4y\hat{\mathbf{j}} - 8z\hat{\mathbf{k}}$$

Recuérdese que dos planos son paralelos si sus vectores normales difieren por un múltiplo escalar a (donde a es una constante), es decir,

$$\vec{N}_1 = a\vec{N}_2$$

Sustituyendo los vectores normales se tiene:

$$\left(2x\hat{\mathbf{i}}-4y\hat{\mathbf{j}}-8z\hat{\mathbf{k}}\right)=a\left(4\hat{\mathbf{i}}-2\hat{\mathbf{j}}+4\hat{\mathbf{k}}\right)$$

Al igualar las componentes en x, y y z de la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} 2x=4a \quad &\Rightarrow \quad x=2a \\ -4y=-2a \quad &\Rightarrow \quad y=\frac{a}{2} \\ -8x=4a \quad &\Rightarrow \quad z=-\frac{a}{2} \end{aligned}$$

Los puntos obtenidos deben estar sobre el hiperboloide $x^2-2y^2-4z^2=16$.

Sustituyendo en la ecuación de la superficie,

$$(2a)^2-2\left(\frac{a}{2}\right)^2-4\left(\frac{-a}{2}\right)^2=16$$

$$4a^2-\frac{a^2}{2}-a^2=16$$

$$2.5a^2=16$$

$$a=\pm 2.5298$$

Sustituyendo en los puntos obtenidos:

$$x_1=5.05964$$

$$x_2=-5.05964$$

$$y_1=1.2649$$

$$y_2=-1.2649$$

$$z_1=-1.2649$$

$$z_2=1.2649$$

Por último, los puntos solicitados son:

$P_1(5.05964, 1.2649, -1.2649)$

$P_2(-5.05964, -1.2649, 1.2649)$

3.36 Considérese un comal caliente, en el cual la temperatura en un punto (x, y) está dada por:

$$T(x, y)=5+2x^2+y^2$$

Encontrar la trayectoria que un *chinicuil* (gusano comestible) debe seguir hacia el origen para no morir cocinado a partir de (4, 2).

Solución

A partir del gradiente de la función, la dirección de mínimo crecimiento se obtiene de la siguiente manera:

$$-\vec{\nabla}T = -4x\hat{\mathbf{i}} - 2y\hat{\mathbf{j}}$$

Nota:

Como el *chinicuil* busca el origen (la parte más fría), éste deberá ir por una trayectoria hacia el origen en donde en cada punto de dicha trayectoria tenga un $-\vec{\nabla}T$ específico.

Si se construye una trayectoria cualquiera en cada punto de la trayectoria, entonces se tendría un y solo un vector $\vec{\nabla}T$ es decir, $\vec{\nabla}T$ representa la dirección de una curva para cada (x, y).

Se supone una función vectorial para la trayectoria de la siguiente manera:

$$\vec{r}(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}}$$

donde las ecuaciones paramétricas son:

$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$

Derivando la ecuación vectorial, se encuentra el vector tangente a la trayectoria pedida:

$$\vec{r}\,'(t) = f'(t)\hat{\mathbf{i}} + g'(t)\hat{\mathbf{j}} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}}$$

Por tanto, se intuye que:

$$-\vec{\nabla}T(x, y) = \vec{r}\,'(t)$$

ya que ambos dan dirección a la curva o son vectores tangentes.

Recordando el gradiente:

$$-\vec{\nabla}T = -4x\hat{\mathbf{i}} - 2y\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{r}\,'(t) = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}}$$

Además,

$$-\vec{\nabla}T(x, y) = \vec{r}\,'(t)$$

Igualando las componentes de las ecuaciones vectoriales anteriores,

$$-4x = \frac{dx}{dt} \qquad \textbf{(1)}$$

$$-2y = \frac{dy}{dt} \qquad \textbf{(2)}$$

De (1) se tiene:

$$-4x = \frac{dx}{dt}$$

$$dt = \frac{dx}{-4x}$$

$$t = -\frac{1}{4}\ln|x| \qquad \textbf{(1´)}$$

Resolviendo para x:

$$e^{-4t} = x \qquad \textbf{(A)}$$

De (2) se tiene:

$$-2y = \frac{dy}{dt}$$

$$dt = \frac{dy}{-2y}$$

$$t = -\frac{1}{2}\ln|y| \qquad \textbf{(2´)}$$

Resolviendo para y,

$$e^{-2t} = y \qquad \textbf{(B)}$$

Las ecuaciones (A) y (B) representan las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del *chinicuil*; de este modo, la función vectorial asociada a la trayectoria del gusano es:

$$\vec{r}(t) = e^{-4t}\,\hat{\mathbf{i}} + e^{-2t}\,\hat{\mathbf{j}}$$

Capítulo

4

Integración múltiple



Problemas resueltos

A continuación se presentan los problemas para resolver del capítulo con su solución detallada.

4.1 Evaluar la integral doble:

$$\iint_R x^3 y^2 \, dA$$

en la región limitada por $y = x$, $y = 0$, $x = 1$.

Solución

En este caso es necesario dibujar la región de integración, la cual está representada en la figura 4.1. Usando rebanadas verticales, el orden de integración es $dy\,dx$, lo que significa que el volumen se puede hallar mediante:

$$V = \iint f(x, y)\, dy\, dx$$

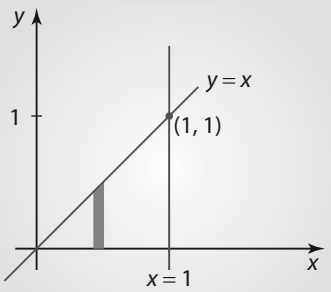


Figura 4.1

La integral puede ser planteada de la siguiente manera (la integral en el corchete representa el área de la rebanada de sólido que posteriormente se convertirá en una porción volumétrica:

$$\int_0^1 \int_0^x x^3 y^2 \, dy \, dx = \int_0^1 \underbrace{\left[\int_0^x x^3 y^2 \, dy \right]}_{\text{Área rectángulo}} dx$$

Nótese que los límites de la primera integral representan el inicio y el final de la rebanada vertical, en tanto que los límites de la segunda integral indican el recorrido horizontal de la misma.

$$= \int_0^1 \frac{x^3 y^3}{3} \bigg|_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^6}{3} dx = \frac{x^7}{21} \bigg|_0^1 = \frac{1}{21}$$

4.2 Evaluar la integral doble $\iint_R (2x+4y+1)\, dA$ limitada por la región comprendida entre las curvas: $y = x^2$ y $y = x^3$.

Solución

La región de integración se ilustra en la figura 4.2.

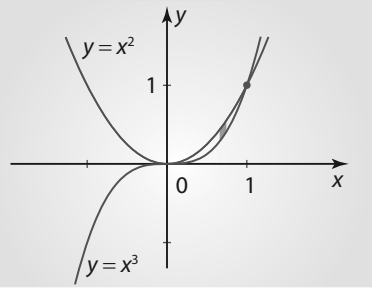


Figura 4.2

En este caso se propone utilizar rebanadas verticales. Para determinar con exactitud la región de integración es necesario hallar la intersección de las dos funciones, lo cual puede hacerse igualando las ecuaciones de ambas gráficas así:

$$x^3 = x^2$$

$$x^2(x-1) = 0$$

Obteniendo las soluciones $x = 1$, $x = 0$, el volumen debajo de la superficie dada queda determinado mediante la expresión:

$$V = \iint f(x, y)\, dy\, dx$$

Nótese que ahora la rebanada vertical inicia desde la función cúbica y finaliza en la parabólica, por lo que puede escribirse:

$$\int_0^1 \underbrace{\left[\int_{x^3}^{x^2} (2x+4y+1)\, dy \right]}_{\text{Área rectángulo}} dx = \int_0^1 \left[\int_{x^3}^{x^2} 2x\, dy + \int_{x^3}^{x^2} 4y\, dx + \int_{x^3}^{x^2} dy \right] dx$$

$$\int_0^1 \left[2xy \Big|_{x^3}^{x^2} + \frac{4y^2}{2} \bigg|_{x^3}^{x^2} + y \Big|_{x^3}^{x^2} \right] dx$$

$$\int_0^1 \left(-2x^6 + x^3 + x^2\right) dx = -\frac{2x^7}{7} \bigg|_0^1 + \frac{x^4}{4} \bigg|_0^1 + \frac{x^3}{3} \bigg|_0^1 = -\frac{2}{7} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{25}{84}$$

4.3 Evaluar la integral doble $\iint_R 2xy\,dA$ limitada por la región $y = x^3, y = 8, x = 0$.

Solución

En este caso, la región de integración está representada en la figura 4.3. Usando rebanadas verticales, el volumen bajo la superficie $z = 2xy$ queda determinado mediante la expresión:

$$V = \iint f(x, y)\,dy\,dx$$

La integral doble puede ser planteada como sigue:

$$\int_0^2 \underbrace{\left[\int_{x^3}^{8} 2xy\,dy\right]}_{\text{Área rebanada}} dx =$$

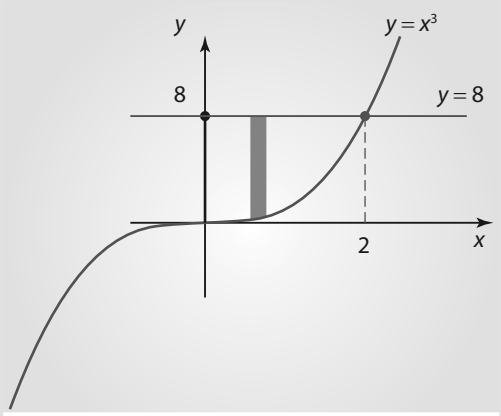


Figura 4.3

$$\int_0^2 \left[xy^2 \Big|_{x^3}^{8} \right] dx = \int_0^2 \left[64x - x^{6+1}\right] dx = \int_0^2 \left[64x - x^7\right] dx = \frac{64x^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{x^8}{8}\Big|_0^2 = 128 - 32 = 96$$

4.4 Aplicar una integral doble para determinar el área de la región *R*, limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = -x$ y $y = 2x - x^2$.

Solución

- **Usando rebanadas verticales**

En la figura 4.4 se muestra la gráfica de la región requerida. Se trata de una parábola que abre hacia abajo, con vértice fuera del origen, cortada por una recta con pendiente negativa que pasa por el origen. Las intersecciones se determinan a partir de la igualación de las ecuaciones correspondientes.

En este primer método se consideran rebanadas verticales, las cuales inician en la recta y finalizan en la parábola, y posteriormente tienen un recorrido horizontal desde $x = 0$ hasta $x = 3$.

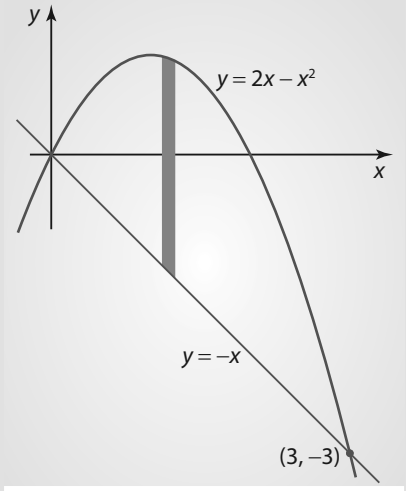


Figura 4.4

El área se determina mediante la expresión:

$$A = \iint_R dy\,dx$$

Por tanto, se tiene,

$$A = \int_0^3 \left[\int_{-x}^{2x-x^2} dy\right] dx$$

$$A = \int_0^3 \left[\int_{-x}^{2x-x^2} dy\right] dx = \int_0^3 y\Big|_{-x}^{2x-x^2} dx$$

$$= \int_0^3 (2x - x^2 + x)\,dx = \int_0^3 (3x - x^2)\,dx = \frac{3x^2}{2}\Big|_0^3 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^3$$

$$= \frac{3(9)}{2} - \frac{27}{3} = 27\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

- **Usando rebanadas verticales y horizontales**

Si ahora se divide en dos partes la región de integración, y a su vez se divide cada una de éstas en rebanadas verticales y horizontales, se pueden plantear dos integrales dobles (una para cada región), como se observa en la figura 4.5.

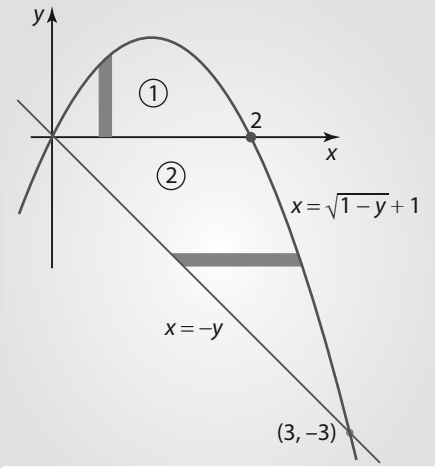


Figura 4.5

Para la región 1 será necesario utilizar:

$$A = \iint dy\,dx$$

En forma similar, para la región 2 se puede escribir:

$$A = \iint dx\,dy$$

Es importante resaltar que al utilizar rebanadas horizontales se debe iniciar despejando la variable x de la ecuación y posteriormente el límite de la integral que comienza en la x de la función que está más a la izquierda de la región, hasta la x que está menos a la izquierda de la misma; en este caso, las ecuaciones quedan así:

$$x = -y$$

$$x = \sqrt{1-y} + 1$$

Por tanto, las integrales para las regiones consideradas son:

$$A = \iint_R dA = \int_0^2 \underbrace{\left[\int_0^{2x-x^2} dy\right]}_{R_1} dx + \int_0^{-3} \underbrace{\left[\int_{-y}^{\sqrt{1-y}+1} dx\right]}_{R_2} dy$$

$$= \int_0^2 \left(y\Big|_0^{2x-x^2}\right) dx + \int_0^{-3} \left(\sqrt{1-y} + 1 + y\right) dy$$

$$= \int_0^2 (2x - x^2)\,dx + \int_0^{-3} \sqrt{1-y}\,dy + \int_0^{-3} dy + \int_0^{-3} y\,dy$$

$$= x^2\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)(1-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{-3} + y\Big|_0^{-3} + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{-3}$$

$$= \frac{4}{3} + \left[-5.3\bar{3} + \frac{2}{3} - 3 + \frac{9}{2}\right] = \frac{4}{3} + \left|-3.166\bar{6}\right|$$

El valor absoluto del segundo término se debe a que el área de la región 2 se encuentra debajo del eje *"x"* origen (lo que resulta en un área negativa), por lo que es necesario considerar solo su valor positivo, como se observa a continuación.

$$A_T = \frac{4}{3} + \left|-3.1\overline{6}\right|$$

$$A_T = 4.5 = \frac{9}{2}$$

4.5 Aplicar una integral doble para determinar el área de la región R, limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = -2x + 3$, $y = x^3$ y $x = -2$.

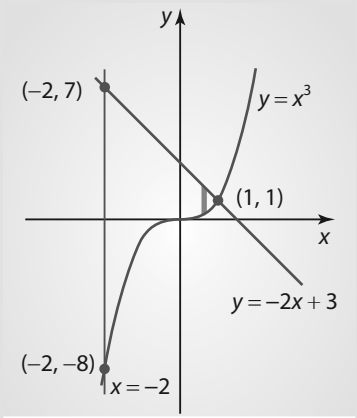


Figura 4.6

Solución

En la figura 4.6 se muestra la región de integración, en donde aparecen las intersecciones entre las funciones (esto se obtiene igualando las ecuaciones correspondientes). En este caso se usan rebanadas verticales para facilitar el planteamiento.

El área se determina a partir de:

$$A = \iint_R dy\,dx$$

En este caso, los límites de integración de la primera integral (interna) inician en la función cúbica y terminan en la línea recta; posteriormente, la rebanada se recorre desde $x = -2$ hasta $x = 1$.

$$A = \int_{-2}^{1} \left[\int_{x^3}^{-2x+3} dy \right] dx$$

$$A = \int_{-2}^{1} \left(y\Big|_{x^3}^{-2x+3} \right) dx = \int_{-2}^{1} \left(-2x + 3 - x^3 \right) dx = -x^2\Big|_{-2}^{1} + 3x\Big|_{-2}^{1} - \frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{1}$$

$$= -1 + 4 + 3 + 6 - \frac{1}{4} + \frac{8}{2} = 15\frac{3}{4} = \frac{63}{4}$$

4.6 Determinar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones $2x + y + z = 6$, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

Solución

El volumen del sólido se encuentra en el primer octante. La superficie dada es un plano cuyas intersecciones en los ejes se determinan igualando a cero las variables restantes en la ecuación del plano.

Intersección en x: $(y = z = 0)$, $x = 3$

Intersección en y: $(x = z = 0)$, $y = 6$

Intersección en z: $(x = y = 0)$, $x = 6$

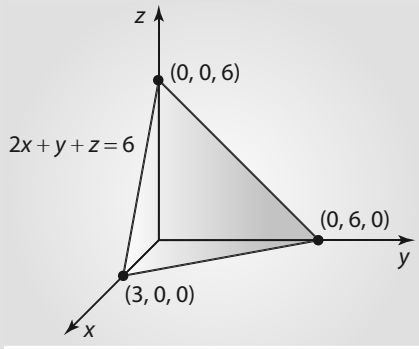


Figura 4.7

En la figura 4.7, el sólido aparece en el primer octante y la región de integración se encuentra en el plano xy, como se observa, tiene la forma de un triángulo rectángulo.

En la figura 4.8 se muestra la región de integración, la cual está determinada por la traza *xy* del plano (que se obtiene haciendo $z = 0$ en la ecuación del plano); esta traza es la recta $2x + y = 6$.

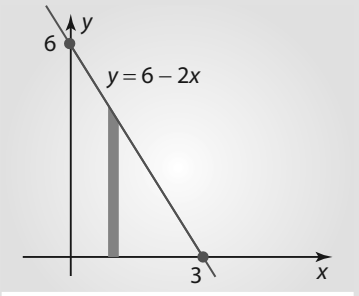


Figura 4.8

Usando rebanadas verticales, el volumen puede determinarse a partir de la siguiente integral doble:

$$V = \iint_R f(x,y)\,dA$$

$$= \int_0^3 \left[\int_0^{6-2x} (6 - y - 2x)\,dy \right] dx$$

$$= \int_0^3 \left[\int_0^{6-2x} 6\,dy - \int_0^{6-2x} y\,dy - 2\int_0^{6-2x} x\,dy \right] dx$$

$$= \int_0^3 \left[6y\Big|_0^{6-2x} - \frac{y^2}{2}\Big|_0^{6-2x} - 2xy\Big|_0^{6-2x} \right] dx$$

$$= \int_0^3 6(6-2x)\,dx - \int_0^3 \frac{(6-2x)^2}{2}\,dx - \int_0^3 2x(6-2x)\,dx$$

$$= 6\left[6x - x^2\right]\Big|_0^3 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\right]\left[\frac{(6-2x)^3}{3}\right]\Big|_0^3 - 12\left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^3 + \frac{4x^3}{3}\Big|_0^3$$

$$= 6(18-9) + \frac{1}{12}(0) - \frac{1}{12}(6^3) - 6(9) + \frac{4}{3}(3)^3$$

$$= 18\,u^3$$

4.7 Determinar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones $x^2 + y^2 = 4$, $x - y + 2z = 4$, $x = 0$ y $z = 0$ en el primer octante.

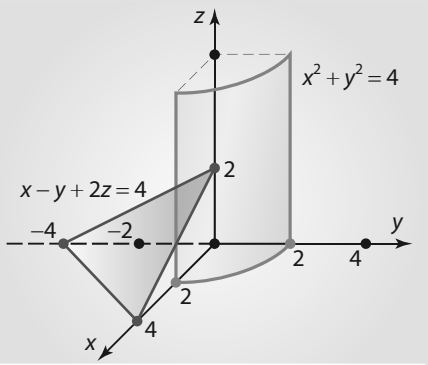


Figura 4.9

Solución

En la figura 4.9 se muestra una porción sólida (plano con las intersecciones mostradas) y la región de integración, la cual es la traza de un cilindro circular de radio 2.

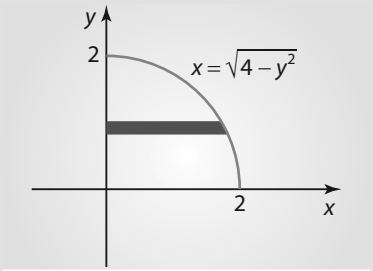


Figura 4.10

Por su parte, en la figura 4.10 aparece la región de integración, la cual es la mitad derecha de un círculo de radio *R;* lo anterior es determinado por las condiciones dadas al inicio, es decir, que el sólido esté limitado por los planos $x = 0$ y $z = 0$ en el primer octante.

Usando rebanadas horizontales, el volumen puede escribirse como:

$$V=\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

$$V=\int_0^2\left[\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\frac{(-x+y+4)}{2}\,dx\right]dy$$

$$V=\int_0^2\frac{1}{2}\left[\frac{-x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{4-y^2}}+yx\Big|_0^{\sqrt{4-y^2}}+4x\Big|_0^{\sqrt{4-y^2}}\right]dy$$

$$V=\frac{1}{2}\int_0^2\left[\frac{-4+y^2}{2}+y\sqrt{4-y^2}+4\sqrt{4-y^2}\right]dy$$

$$V=\frac{1}{4}\left[-4y\Big|_0^2+\frac{y^3}{3}\Big|_0^2\right]+\frac{1}{2}\int_0^2 y\sqrt{4-y^2}\,dy+\frac{4}{2}\int_0^2\sqrt{4-y^2}\,dy$$

$$V=\frac{1}{4}\left[-4(2)+\frac{8}{3}\right]+\left(-\frac{1}{4}\right)\left(4-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\Big|_0^2+4\int_0^2\sqrt{4-y^2}\,dy$$

$$V=-2+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}(4)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{2}\int_0^2\sqrt{4-y^2}\,dy$$

$$V=0+\frac{4}{2}\left[\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2}+\frac{4}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{y}{2}\right]\Big|_0^2$$

$$V=\frac{4}{2}\left[2\frac{\pi}{2}\right]=2\pi$$

4.8 Determinar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las siguientes ecuaciones:

$z=1+x^2+y^2$ $\quad x=0$ $\quad z=0$

$3x+y=3$ $\quad y=0$

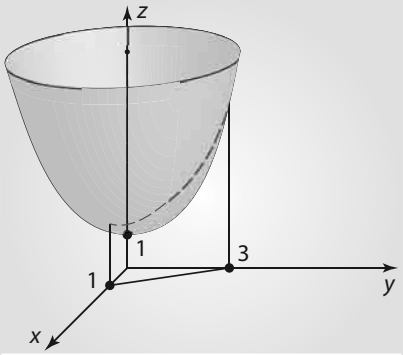


Figura 4.11

Solución

En la figura 4.11 se muestra el sólido en cuestión (el cual es un paraboloide desplazado una unidad en el eje *z*), junto con la región de integración.

Por su parte, en la figura 4.12 se observa la región de integración; como se puede ver, en esta ocasión se utilizan rebanadas verticales para esta región.

Por tanto, la integral puede escribirse así:

$$V=\iint_R f(x,y)\,dy\,dx$$

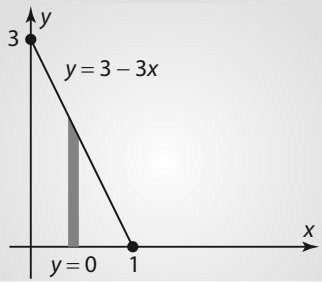


Figura 4.12

$$V=\int_0^1\left[\int_0^{3-3x}\left(1+x^2+y^2\right)dy\right]dx$$

$$V=\int_0^1\left[y\Big|_0^{3-3x}+x^2y\Big|_0^{3-3x}+\frac{y^3}{3}\Big|_0^{3-3x}\right]dx$$

$$V=\int_0^1\left[3-3x+x^2(3-3x)+\frac{(3-3x)^3}{3}\right]dx$$

$$V=\int_0^1\left[3-3x+3x^2-3x^3+\frac{(3-3x)^3}{3}\right]dx$$

$$V=3\int_0^1 dx-3\int_0^1 x\,dx+3\int_0^1 x^2\,dx-3\int_0^1 x^3\,dx+\frac{1}{3}\int_0^1(3-3x)^3\,dx$$

$$u=3-3x \qquad du=-3dx$$

$$V=3x\Big|_0^1-\frac{3x^2}{2}\Big|_0^1+x^3\Big|_0^1-\frac{3x^4}{4}\Big|_0^1+\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3}\right]\frac{(3-3x)^4}{4}\Big|_0^1$$

$$V=3-\frac{3}{2}+1-\frac{3}{4}-\frac{1}{9}(0)+\frac{1}{9}\frac{(3)^4}{4}$$

$$V=4\,u^3$$

4.9 Hallar el volumen de sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones:

$yz=6$	$x=5$	$y=6$
$x=0$	$y=1$	$z=0$

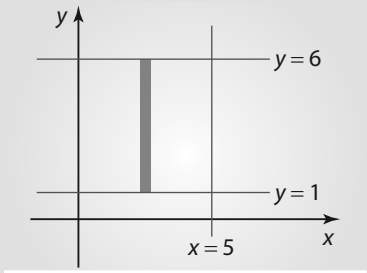


Figura 4.13

Solución

En este problema es importante asegurarse que el sólido es positivo para la región considerada, lo cual es cierto, pues al resolver para la variable z se nota que:

$$z=\frac{6}{y}$$

Como se puede deducir, el volumen se encuentra entre $y=1$ y $y=6$, por lo que el sólido se encuentra por encima del plano xy. Entonces será suficiente con analizar la región de integración (véase figura 4.13).

Usando rebanadas verticales, se puede escribir:

$$V=\iint_R f(x,y)\,dy\,dx$$

$$V=\int_0^5\left[\int_1^6\frac{6}{y}\,dy\right]dx$$

$$V=\int_0^5 6\left[\int_1^6\frac{dy}{y}\right]dx$$

$$V=6\int_0^5\left(\ln y\right)_1^6\,dx$$

$$V=6\left(\ln 6-\ln 1\right)\int_0^5 dx$$

$$V=6\left(\ln 6-\ln 1\right)5$$

$$V=30\ln 6$$

4.10 Encontrar el volumen del sólido limitado por las ecuaciones:

$$z=4-y^2, \qquad x^2+y^2=2x, \qquad z=0$$

Solución

Como puede deducirse, el sólido dado es un cilindro parabólico que se extiende infinitamente hacia el eje x, intersectado por un cilindro circular con centro fuera del origen y limitado por el plano xy ($z = 0$), como se aprecia en la figura 4.14.

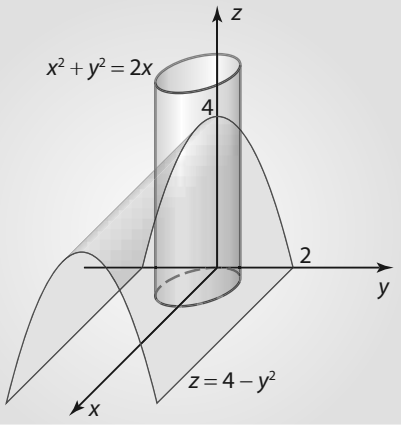


Figura 4.14

La ecuación del cilindro circular, $x^2+y^2=2x$, se puede escribir en forma estándar (como se acostumbra en geometría analítica) de la siguiente manera:

$$(x-1)^2+y^2=1$$

En la figura 4.15 se aprecia la región de integración del sólido que se desea calcular.

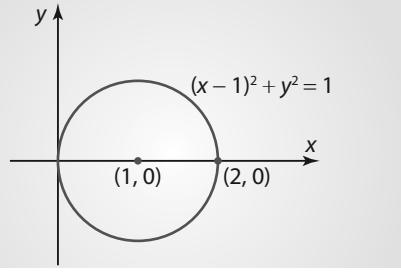


Figura 4.15

Una forma de realizar el cálculo es dividiendo esta región circular en cuatro partes, usando rebanadas horizontales y notando que la recta $x = 1$ limita la región. En este caso, las dimensiones de las rebanadas horizontales inician con $x=-\sqrt{1-y^2}+1$ (se toma la parte negativa de la raíz, porque es la que está más a la izquierda del origen) y terminan con $x = 1$. En la figura 4.16 se muestra esta partición.

El volumen puede hallarse de la manera siguiente:

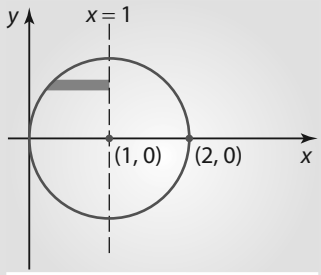


Figura 4.16

$$V = 4\int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}+1}^{1} (4-y^2)\,dx \right] dy$$

$$V = 4\int_0^1 \left[4x\Big|_{-\sqrt{1-y^2}+1}^{1} - y^2 x\Big|_{-\sqrt{1-y^2}+1}^{1} \right] dy$$

$$V = 4\left[\int_0^1 4\left(1+\sqrt{1-y^2}-1\right) dy + \int_0^1 \left(-y^2 - y^2\sqrt{1-y^2}+y^2\right) dy \right]$$

$$V = 4\left[\int_0^1 4\sqrt{1-y^2}\,dy - \int_0^1 y^2\sqrt{1-y^2}\,dy \right]$$

$$V = 4\left[\pi - \frac{\pi}{16} \right]$$

$$V = \frac{15}{4}\pi$$

4.11 Calcular el volumen del sólido contenido en el primer octante, limitado por las gráficas de las siguientes ecuaciones:

$x^2 + z^2 = 9$, $y = 0$

$y = 2x$, $z = 0$

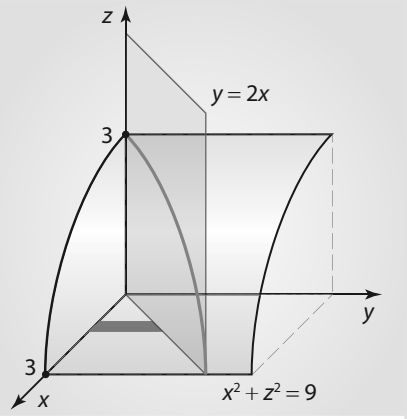


Figura 4.17

Solución

El volumen del sólido consiste de un cilindro circular de radio 3 en el primer octante, limitado por un plano que pasa por el origen y los planos $y = z = 0$ (véase figura 4.17).

Como se observa en la figura 4.18, la región de integración es un triángulo rectángulo.

Usando rebanadas verticales se puede escribir:

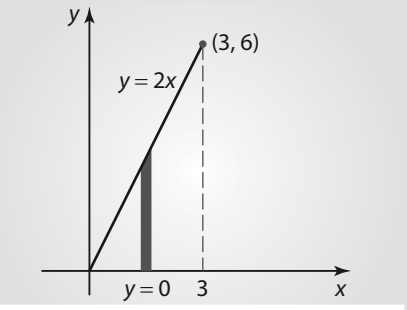


Figura 4.18

$$V = \int_0^3 \left[\int_0^{2x} \sqrt{9-x^2}\,dy \right] dx = \int_0^3 \left[\sqrt{9-x^2} \right]_0^{2x} dx$$

$$= \int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,2x\,dx \quad \begin{matrix} u = 9-x^2 \\ du = -2x \end{matrix} \quad = -\frac{2}{3}\left(9-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = \frac{2}{3}(9)^{\frac{3}{2}} = 18$$

4.12 Encontrar el volumen del sólido limitado por las siguientes ecuaciones:

$z = x^3$ $\quad x = 4y^2$ $\quad 16y = x^2$ $\quad z = 0$

Solución

El volumen del sólido en cuestión es el que se encuentra por debajo del cilindro parabólico cúbico ($z = x^3$), donde la región de integración está limitada por las parábolas vertical y horizontales $x = 4y^2$ y $16y = x^2$. En la figura 4.19 se muestra un bosquejo de las superficies.

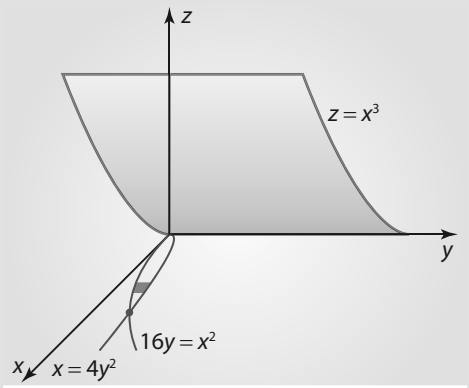


Figura 4.19

En la figura 4.20 aparece la región de integración. En este caso, los puntos de intersección se obtienen igualado las ecuaciones de las parábolas que forman la región de integración.

Se sabe que:

$$y^2 = \frac{x}{4} \quad \textbf{(1)}$$

$$x^2 = 16y \quad \textbf{(2)}$$

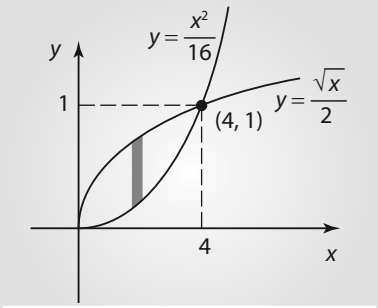


Figura 4.20

De la ecuación (1) se deduce que:

$$x^2 = 16y^4 \quad \textbf{(3)}$$

Igualando (2) y (3) se tiene:

$$16y^4 = 16y$$

Entonces,

$$y = 1, y = 0$$

Los valores obtenidos representan las ordenadas de los puntos de intersección de las parábolas que forman la región de integración.

$$V = \int_0^4 \left[\int_{\frac{x^2}{16}}^{\frac{\sqrt{x}}{2}} x^3 \, dy \right] dx$$

$$V = \int_0^4 \left(x^3 y \Big|_{\frac{x^2}{16}}^{\frac{\sqrt{x}}{2}} \right) dx$$

$$V = \int_0^4 \left(\frac{x^3 (x)^{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{x^3 x^2}{16} \right) dx$$

$$V = \int_0^4 \frac{x^{\frac{7}{2}}}{2} dx - \int_0^4 \frac{x^5}{16} dx$$

$$V = \frac{x^{\frac{9}{2}}}{9}\Big|_0^4 - \frac{x^6}{96}\Big|_0^4$$

$$V = 56.88 - 42.66$$

$$V = 14.22$$

4.13 Calcular el volumen del sólido limitado por las gráficas de las siguientes ecuaciones:

$z = x^2 + 4, \qquad x + y = 2$

$y = 4 - x^2, \qquad z = 0$

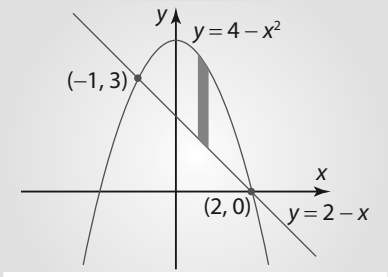


Figura 4.21

Solución

En este caso, la región de integración está limitada por la región entre la parábola que abre hacia abajo y recta $x + y = 2$. En la figura 4.21 se muestra la región con sus correspondientes puntos de intersección, los cuales se pueden obtener igualando las ecuaciones que forman la región de integración.

Usando rebanadas verticales, la integral doble puede ser planteada de la siguiente manera:

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

$$V = \int_{-1}^{2} \left[\int_{2-x}^{4-x^2} \left(x^2 + 4\right) dy \right] dx = \int_{-1}^{2} \left[\left(x^2 y + 4y\right)\Big|_{2-x}^{4-x^2} \right] dx$$

$$V = \int_{-1}^{2} x^2 \left(2 - x^2 + x\right) dx + 4 \int_{-1}^{2} \left(2 - x^2 + x\right) dx$$

$$V = \int_{-1}^{2} 2x^2\, dx - \int_{-1}^{2} x^4\, dx + \int_{-1}^{2} x^3\, dx + 8 \int_{-1}^{2} dx - 4 \int_{-1}^{2} x^2\, dx + 4 \int_{-1}^{2} x\, dx$$

$$V = \frac{2}{3} x^3 \Big|_{-1}^{2} - \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{2} + \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{2} + 8x\Big|_{-1}^{2} - \frac{4}{3} x^3 \Big|_{-1}^{2} + 2x^2\Big|_{-1}^{2}$$

$$V = 6 - 6.6 + 3.75 + 24 - 12 + 6$$

$$V = 21.15$$

4.14 Calcular el volumen del sólido contenido en el primer octante y acotado por:

$z = x^2 + y^2, \qquad y = 4 - x^2$

Solución

En la figura 4.22 se observa el sólido correspondiente, el cual es la intersección entre un paraboloide y un cilindro parabólico; asimismo, se muestra la región de integración correspondiente.

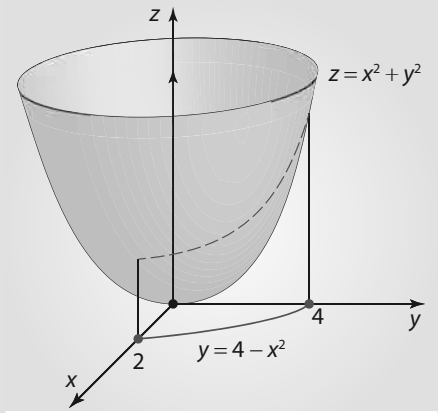


Figura 4.22

En la figura 4.23 se muestra la región de integración usando rebanadas verticales.

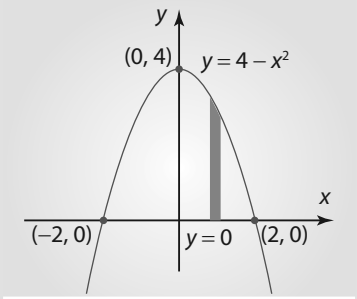


Figura 4.23

La integral doble que corresponde al volumen puede escribirse así:

$$V=\int_0^2\left[\int_0^{4-x^2}\left(x^2+y^2\right)dy\right]dx$$

$$V=\int_0^2\left[x^2\left(4-x^2\right)+\frac{\left(4-x^2\right)^3}{3}\right]dx$$

$$V=\int_0^2 4x^2\,dx-\int_0^2 x^4\,dx+\frac{1}{3}\int_0^2 64\,dx-\frac{1}{3}\int_0^2 48x^2\,dx+\frac{1}{3}\int_0^2 12x^4\,dx-\frac{1}{3}\int_0^2 x^6\,dx$$

$$V=\frac{4}{3}x^3\Big|_0^2-\frac{x^5}{5}\Big|_0^2+\frac{64}{3}x\Big|_0^2-\frac{48}{9}x^3\Big|_0^2+\frac{4}{5}x^5\Big|_0^2-\frac{x^7}{21}\Big|_0^2$$

$$=23.77$$

4.15 Calcular el volumen del sólido bajo el plano $z=4x$ y que está arriba de la circunferencia $x^2+y^2=16$ en el plano xy.

Nota: Considerar sólo el primer octante.

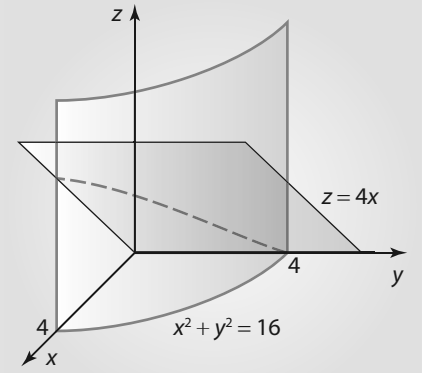


Figura 4.24

Solución

En la figura 4.24 se muestra el sólido junto con la región de integración en el primer octante.

En la figura 4.25 aparece la región de integración.

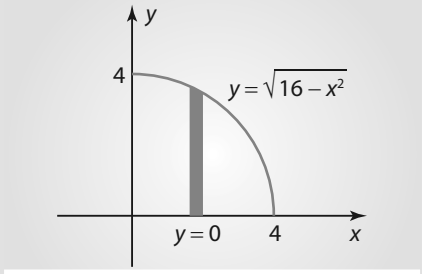


Figura 4.25

Usando rebanadas verticales, la integral doble se puede escribir de la siguiente forma:

$$V=\int_0^4\left[\int_0^{\sqrt{16-x^2}}4x\,dy\right]dx$$

$$V=\int_0^4\left(4xy\Big|_0^{\sqrt{16-x^2}}\right)dx$$

$$V=\int_0^4 4x\sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$V=\frac{4}{-2}\left(16-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)\Big|_0^4$$

$$V=\frac{4}{3}(16)^{\frac{3}{2}}=\frac{256}{3}$$

4.16 Calcular el volumen del cuerpo limitado por el cilindro circular de radio a, cuyo eje de simetría coincide con el eje z, los planos coordenados (primer octante) y el plano $\frac{x}{a}+\frac{z}{a}=1$.

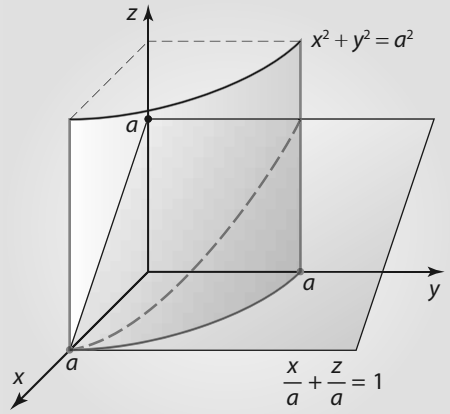


Figura 4.26

Solución

La figura 4.26 muestra un bosquejo del sólido.

La región de integración es un cuarto de círculo. En la figura 4.27 se muestra esta región con rebanadas verticales.

El volumen se determina de la siguiente manera:

$$V=\int_0^a\left[\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}(a-x)\,dy\right]dx$$

$$V=\int_0^a(a-x)y\Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$V=\int_0^a(a-x)\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$V=\int_0^a a\sqrt{a^2-x^2}\,dx-\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad \begin{matrix}u=a^2-x^2\\ du=-2x\end{matrix}$$

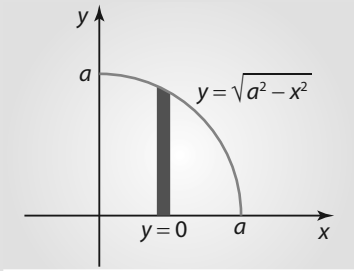


Figura 4.27

$$V=a\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right)\Big|_0^a+\frac{1}{2}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\Big|_0^a$$

$$V=\frac{a^3}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\left(a^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$V=\frac{a^3\pi}{4}-\frac{a^3}{3}$$

$$V=a^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right)$$

4.17 Usar una integral triple para calcular el volumen de la intersección de las superficies dadas:

$$z=x^2,\ z=x^3,\ y=z^2$$

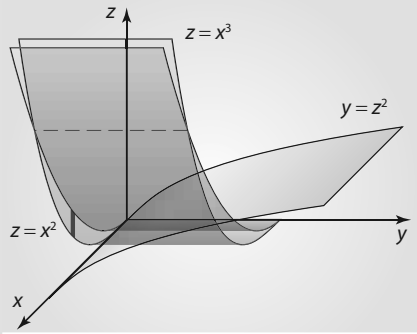


Figura 4.28

Solución

En la figura 4.28 se muestran las superficies consideradas.

Es importante hacer notar que existen sólidos en los que la región de integración es más simple en

ciertos planos coordenados; es decir, no necesariamente en los planos *xy* se encuentra la región más sencilla de integrar. Como se observa en la figura 4.28, la región de integración en los planos *xz* es una buena alternativa para la aplicación de la integral triple.

Por tanto, la integral puede escribirse en el siguiente orden de integración:

$$V = \iiint_R dy\,dz\,dx$$

Es decir, el sólido tiene una altura a lo largo del eje *y*, mientras que la región de integración se encuentra en el plano *xz*, como se muestra en la figura 4.29.

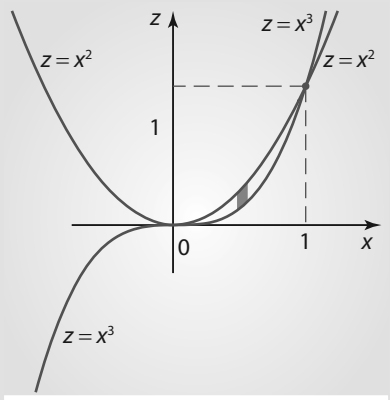


Figura 4.29

Por tanto, se puede escribir:

$$V = \iint_R \left[\int_0^{z^2} dy \right] dA$$

$$V = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} \int_0^{z^2} dy\,dz\,dx = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} z^2\,dz\,dx = \int_0^1 \frac{z^3}{3}\Big|_{x^3}^{x^2} dx$$

$$\int_0^1 \left[\frac{(x^2)^3}{3} - \frac{(x^3)^3}{3} \right] dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x^6\,dx - \frac{1}{3}\int_0^1 x^9\,dx$$

$$\frac{x^7}{21}\Big|_0^1 - \frac{x^{10}}{30}\Big|_0^1 = \frac{1}{21} - \frac{1}{30} = \frac{1}{70}$$

4.18 Hallar el volumen del sólido limitado por las ecuaciones dadas. Usar una integral triple.

$y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 2, x = 0$

Solución

El volumen del sólido se encuentra representado en la figura 4.30; por simplicidad solo se muestra el primer octante.

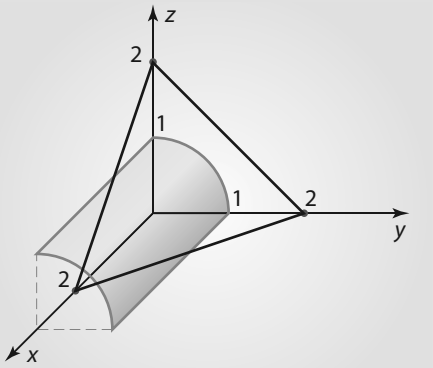


Figura 4.30

Nótese que la región de integración puede ser considerada como un círculo en el plano *yz* y la altura del sólido es a lo largo del eje *x*. Cabe mencionar que no es la única forma de realizar este cálculo; sin embargo, sí es una de las más sencillas. En la figura 4.31 aparece la región de integración (donde se usan rebanadas verticales).

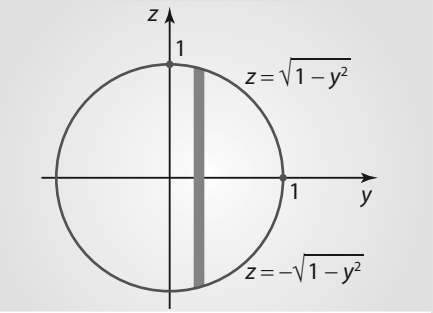


Figura 4.31

El volumen se obtiene como sigue:

$$V = \iint_R \left[\int_0^{2-y-z} dx \right] dz\,dy$$

$$V=\int_{-1}^{+1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}}\int_{0}^{2-y-z} dx\,dz\,dy=\int_{-1}^{+1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}}(2-y-z)\,dz\,dy=\int_{-1}^{+1}\left(2z-yz-\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}}dy$$

$$=\int_{-1}^{+1}\left[2\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-y^2}-\frac{\cancel{(1-y^2)}}{2}+2\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-y^2}+\frac{\cancel{(1-y^2)}}{2}\right]dy$$

$$V=4\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-y^2}\,dy-2\int_{-1}^{+1}y\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$u=1-y^2$
$du=-2y\,dy$

La primera integral se obtiene mediante tablas de integración, o puede hallarse mediante sustitución trigonométrica:

$$V=4\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right]+\frac{2}{3}\left(1-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{+1}$$

$$V=4\left[\frac{\pi}{2}\right]=2\pi$$

4.19 Determinar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las siguientes ecuaciones:

$z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ $\qquad$ $x^2+y^2=1$

$z=0$ $\qquad$ $x^2+y^2=9$

Solución

El sólido es un hemisferio de radio 4, limitado por dos cilindros concéntricos de radios 1 y 3 respectivamente, como se observa en la figura 4.32.

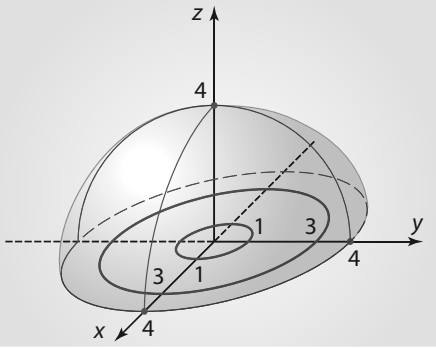


Figura 4.32

Este problema es un claro ejemplo de que las ecuaciones del sólido y de la región de integración resultan más sencillas si se utilizan las coordenadas polares.

El hemisferio $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ puede representarse en coordenadas polares como:

$$z=\sqrt{16-r^2}$$

Los cilindros $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=9$ en coordenadas polares tienen la forma:

$$r=1,\ r=3$$

La región de integración se muestra en la figura 4.33.

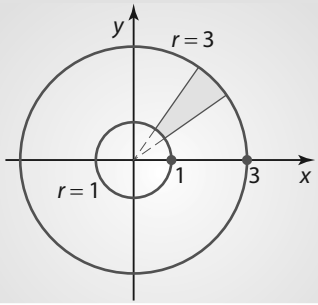


Figura 4.33

El volumen se puede hallar mediante:

$$V = \iint f(r,\theta) r\, dr\, d\theta$$

Al observar que existe simetría en el sólido, se puede hallar el volumen limitado en el primer octante, para luego multiplicar por cuatro, con el fin de determinar el volumen total; esto es,

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_1^3 \sqrt{16-r^2}\, r\, dr\right] d\theta$$

$$V = 4\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(16-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3\left(\frac{2}{3}\right) d\theta$$

$$V = -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -39.5745\, d\theta$$

$$V = \frac{+158.29}{3}\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$V = 52.7633\frac{\pi}{2}$$

$$V = 26.38\pi$$

4.20 Calcular el volumen del sólido que se encuentra arriba del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

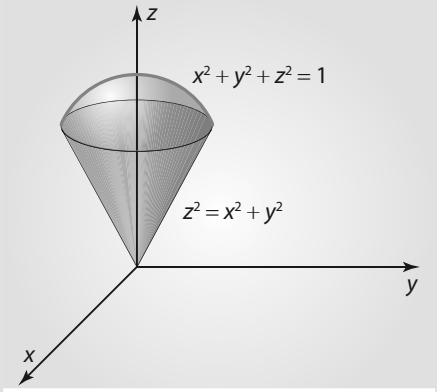


Figura 4.34

Solución

En la figura 4.34 se muestra el sólido formado por la intersección de la esfera y el cono.

Es importante notar que el sólido tiene un punto de simetría, por lo que sería recomendable un cambio de coordenadas. De este modo, utilizando coordenadas esféricas se tiene que las ecuaciones de transformación son:

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \quad (1)$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \quad (2)$$

$$z = \rho \cos\phi \quad (3)$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (4)$$

- **Para el cono $z^2 = x^2 + y^2$**

Sustituyendo las ecuaciones de transformación anteriores (1), (2) y (3),

$$\rho^2 \cos^2\phi = \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\cos^2\phi = \operatorname{sen}^2\phi\,(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$1 = \frac{\operatorname{sen}^2\phi}{\cos^2\phi}$$

$$1 = \tan\phi$$

Por tanto, la ecuación del cono en coordenadas esféricas es:

$$\phi = \frac{\pi}{4}$$

- **Para la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$**

Sustituyendo (4) en la ecuación anterior se tiene:

$$\rho = 1$$

El volumen en este sistema de coordenadas será calculado por:

$$V = \iiint \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Los límites de integración están representados por la región de integración, la cual tiene una variación de 0 a 1 a lo largo de la coordenada ρ; de 0 a $\pi/4$ a lo largo de ϕ y de 0 a 2π a lo largo de θ. En la figura 4.35 se muestra esta forma de representar los límites de integración en el sólido.

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{3}\rho^3 \operatorname{sen}\phi \Big|_0^1 \, d\phi \, d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$V = -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \cos\phi \Big|_0^{\pi/4} \, d\theta$$

$$V = -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\cos\frac{\pi}{4} - 1\right) d\theta$$

$$V = \frac{1}{3}\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right)2\pi$$

$$V = \frac{2}{3}\pi\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right)$$

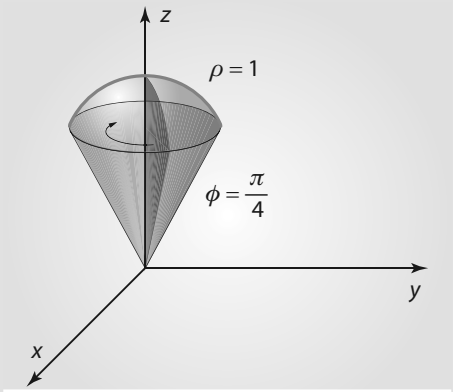


Figura 4.35

4.21 Calcular el volumen del sólido que se encuentra arriba del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

Solución

El sólido de este problema es semejante al del problema anterior (véase figura 4.36), por lo que se recomienda un cambio a coordenadas esféricas.

Para la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4z$$

Para este caso, la ecuación queda así:

$$\rho = 4\cos\phi$$

- **Para el cono $z^2 = x^2 + y^2$**

Aquí la ecuación es:

$$\phi = \frac{\pi}{4}$$

El volumen puede hallarse como sigue:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{4\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

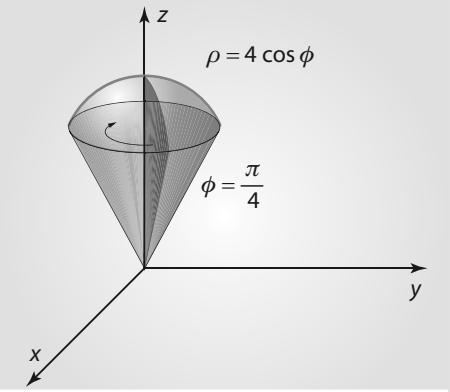


Figura 4.36

Por tanto:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3}\rho^3 \operatorname{sen}\phi\Big|_0^{4\cos\phi} d\phi \, d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}4^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\phi \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{4^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \underset{\substack{u=\cos\theta \\ du=-\operatorname{sen}\phi\, d\theta}}{\cos^3\phi \operatorname{sen}\phi} \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{4^3}{3}\left(-\frac{\cos^4\phi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = -\frac{16}{3}\int_0^{2\pi} \cos^4\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

$$= -\frac{16}{3}\left(\frac{1}{4} - 1\right)2\pi = 8\pi$$

4.22 Encontrar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones indicadas en el primer octante.

$z^2 = 3x^2 + 3y^2$

$x = 0$

$y = 0$

$z = 2$

Solución

En la figura 4.37 se muestra el sólido correspondiente. Utilizando el sistema de coordenadas esféricas, se puede escribir:

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \qquad \textbf{(1)}$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(2)}$$

$$z = \rho \cos\phi \tag{3}$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{4}$$

- **Para el cono $z^2 = 3x^2 + 3y^2$**

Sustituyendo (1), (2) y (3):

$$\rho^2 \cos^2\phi = 3(\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$\rho^2 \cos^2\phi = 3\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi$$

$$1 = 3\frac{\operatorname{sen}^2\phi}{\cos^2\phi}$$

$$\tan^2\phi = \frac{1}{3}$$

$$\tan\phi = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

La ecuación del cono es:

$$\phi = 30° = \frac{\pi}{6}$$

- **Para el plano $z = 2$**

Sustituyendo (4) en la ecuación del plano se tiene:

$$2 = \rho \cos\phi$$

$$\rho = 2\sec\phi$$

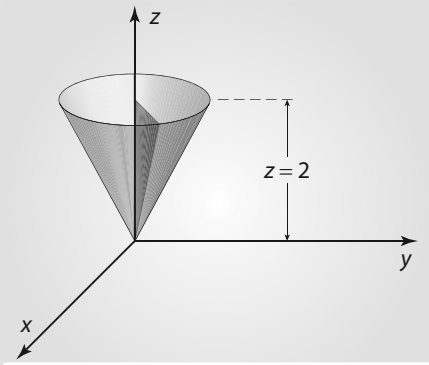


Figura 4.37

El volumen está dado por:

$$V = \iiint \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{2\sec\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^3\phi \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$V = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos^3\phi} \, d\phi \, d\theta$$

$$V = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen}\phi \cos^{-3}\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$u = \cos\phi \qquad du = -\operatorname{sen}\phi \, d\phi$$

$$V=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(-\cos^{-2}\phi\right)}{-2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta$$

$$V=\frac{8}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2\phi}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta$$

$$V=\frac{8}{6}\left[\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{6}}-1\right]\frac{\pi}{2}$$

$$V=0.22\bar{2}\pi$$

4.23 Calcular el volumen de la región acotada arriba por la esfera $\rho=a$ y abajo por el cono $\phi=c$ donde $0<c<\frac{\pi}{2}$.

Solución

Por lo visto en los problemas anteriores, aquí se trata de un cono coronado por una esfera (ambos ya están dados en coordenadas esféricas), como se observa en la figura 4.38.

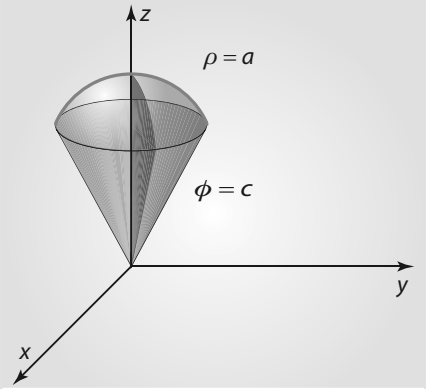


Figura 4.38

El volumen puede obtenerse de la siguiente manera:

$$V=\iiint dV=\iiint\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{C}\left[\int_0^{a}\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\right]d\phi\,d\theta$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{C}\frac{1}{3}\rho^3\operatorname{sen}\phi\Big|_0^{a}d\phi\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\int_0^{C}a^3\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}a^3\left(-\cos\phi\right)\Big|_0^{C}d\theta$$

$$=\frac{1}{3}a^3\int_0^{2\pi}\left(1-\cos C\right)d\theta=\frac{1}{3}a^3\left(1-\cos C\right)2\pi=\frac{2}{3}\pi a^3\left(1-\cos C\right)$$

4.24 Hallar el volumen limitado por el plano *xy*, el cilindro $x^2+y^2=2ax$ y el cono $z^2=x^2+y^2$.

Solución

En la figura 4.39 aparece un bosquejo del sólido (aunque solo se muestra el primer octante); en ésta es posible observar que el cilindro circular tiene centro fuera del origen, lo que puede comprobarse completando el trinomio cuadrado perfecto en su ecuación, como se muestra a continuación:

$$x^2-2ax+y^2=0$$

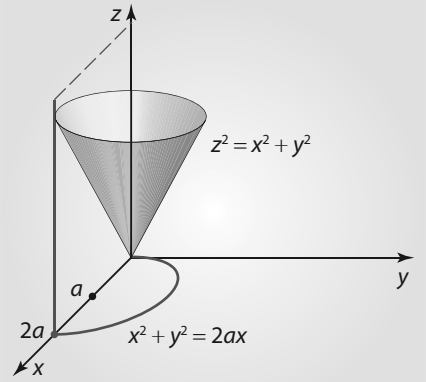


Figura 4.39

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2$$

$$\underbrace{(x-a)^2 + y^2 = a^2}_{\text{cilindro}}$$

Utilizando coordenadas cilíndricas, las ecuaciones del cono y el cilindro tienen una estructura más sencilla, para lo cual conviene recordar las ecuaciones de transformación dadas por:

$$x = r\cos\theta \quad \textbf{(1)}$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta \quad \textbf{(2)}$$

$$z = z \quad \textbf{(3)}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \textbf{(4)}$$

- **Para el cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$**

Sustituyendo (1) y (2) se tiene:

$$r = 2a\cos\theta$$

- **Para el cono $z^2 = x^2 + y^2$**

Sustituyendo (1), (2) y (3) se tiene:

$$z = r$$

La región de integración de la mitad del sólido se muestra en la figura 4.40, con la rebanada correspondiente. Para encontrar el volumen completo será necesario multiplicar por dos el cálculo realizado en el primer octante.

$$V = \iiint dz\, r\, dr\, d\theta$$

$$V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} \int_0^{r} dz\, r\, dr\, d\theta$$

$$V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} r\left(r\, dr\, d\theta\right)$$

$$V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3}\right]\Bigg|_0^{2a\cos\theta} d\theta$$

$$V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8a^3}{3}\cos^3\theta\, d\theta$$

$$V = \frac{16}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \text{sen}^2\,\theta\right)\cos\theta\, d\theta$$

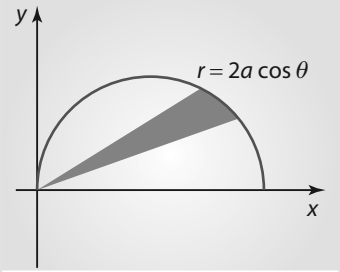


Figura 4.40

$$V=\frac{16}{3}a^3\left[\operatorname{sen}\theta-\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$V=\frac{32}{9}a^3$$

4.25 Determinar el volumen del sólido comprendido entre los conos $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=\sqrt{9x^2+9y^2}$ y el plano $z=3$.

Solución

Por lo visto en ejemplos anteriores, en este caso los conos tienen una representación matemática más simple si se transforman en coordenadas esféricas.

$$x=\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \quad (1)$$

$$y=\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \quad (2)$$

$$z=\rho\cos\phi \quad (3)$$

$$\rho^2=x^2+y^2+z^2 \quad (4)$$

- **Para el cono $z^2=x^2+y^2$**

Sustituyendo (1), (2) y (3) se tiene:

$$\rho^2\cos^2\phi=\rho^2\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\rho^2\cos^2\phi=\rho^2\operatorname{sen}^2\phi \quad (1)$$

$$1=\tan\phi$$

$$\phi=\frac{\pi}{4}$$

- **Para el cono $z^2=9x^2+9y^2$**

Sustituyendo (1), (2) y (3) se tiene:

$$\rho^2\cos^2\phi=9(\rho^2\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}^2\theta)$$

$$\rho^2\cos^2\phi=9\rho^2\operatorname{sen}^2\phi$$

$$\frac{1}{9}=\frac{\operatorname{sen}^2\phi}{\cos^2\phi}$$

$$\frac{1}{3}=\tan\phi\ \Rightarrow\ \phi=18.435$$

$$\phi=\frac{\pi}{9.764}\text{ rad}$$

- **Para el plano $z=3$**

Sustituyendo (3),

$$3=\rho\cos\phi$$

$$\rho=3\sec\phi$$

En la figura 4.41 se muestra una representación del sólido en cuestión.

El volumen está dado por:

$$V=\iiint_Q \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

Los límites de integración en la integral triple son:

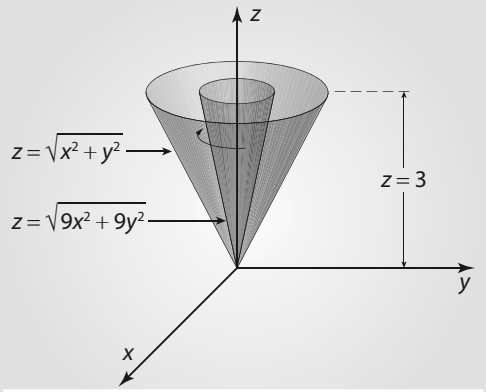


Figura 4.41

$$V=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{9.764}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3\sec\varnothing}\rho^2\operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{9.764}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3}\rho^3\operatorname{sen}\phi\Big|_0^{3\sec\phi}\, d\phi\, d\theta$$

$$V=\frac{27}{3}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{9.764}}^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\phi\operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$V=9\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{9.764}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos^3\theta}\, d\phi\, d\theta$$

$$V=9\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{9.764}}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{sen}\phi\cos^{-3}\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$u=\cos\phi \qquad du=-\operatorname{sen}\phi\, d\theta$$

$$V=-9\int_0^{2\pi}\frac{\cos^{-2}\phi}{-2}\Big|_{\frac{\pi}{9.764}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cos^2\phi}\Big|_{\frac{\pi}{9.764}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta$$

$$V=4(2\pi)=8\pi$$

4.26 Calcular el volumen de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ empleando una integral triple en coordenadas esféricas.

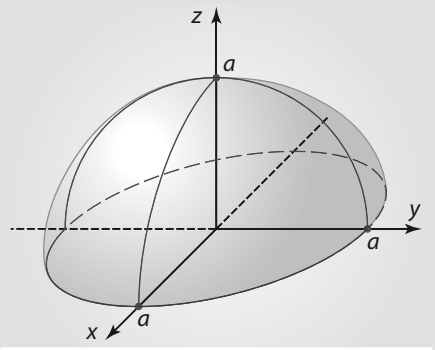


Figura 4.42

Solución

En la figura 4.42 se muestra la mitad del sólido.

Es claro que las coordenadas esféricas son la mejor opción. Por lo anterior, el cálculo del volumen se escribe:

$$V=\iiint \rho^2\operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

Para hallar el volumen completo es necesario multiplicar por dos el volumen del hemisferio mostrado en la figura 4.42.

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a}\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\rho^3 \operatorname{sen}\phi\Big|_0^{a} \, d\phi \, d\theta$$

$$V = \frac{2}{3}a^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$V = \frac{2}{3}a^3\int_0^{2\pi}(-\cos\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \, d\theta$$

$$V = \frac{2}{3}a^3\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$V = \frac{2}{3}a^3(2\pi)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

4.27 Hallar el volumen del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, interceptado entre el paraboloide $x^2 + y^2 = 2az$ y el plano *xy*.

Solución

El cilindro tiene centro fuera del origen. Por tanto, completando el trinomio cuadrado perfecto se puede escribir:

$$x^2 + y^2 = 2ax$$

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2$$

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

El paraboloide abre hacia el eje *z*, y con el uso de coordenadas cilíndricas se puede facilitar el cálculo. En la figura 4.43 se muestra un bosquejo del sólido en el primer octante (en este caso es necesario duplicar el volumen para determinar el volumen requerido).

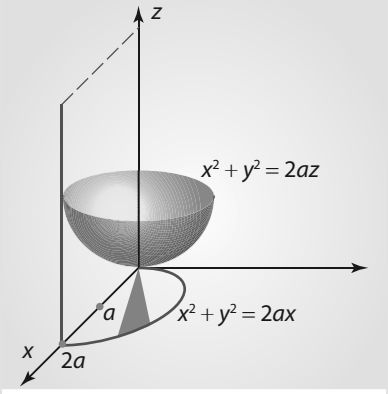


Figura 4.43

Recuérdese que las ecuaciones de transformación en coordenadas cilíndricas son:

$$x = r\cos\theta \qquad \textbf{(1)}$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(2)}$$

$$z = z \qquad \textbf{(3)}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \textbf{(4)}$$

- **Para el cilindro:** $x^2 + y^2 = 2ax$

Sustituyendo (1) y (2) se tiene:

$$r = 2a\cos\theta$$

- **Para paraboloide:** $x^2 + y^2 = 2az$

Sustituyendo (4) se tiene:

$$z = \left(\frac{r^2}{2a}\right)$$

El volumen puede hallarse de la siguiente manera:

$$V = \iiint r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} \int_0^{\frac{r^2}{2a}} r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} \frac{r^3}{2a}\, dr\, d\theta$$

$$V = \frac{1}{4a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\Big|_0^{2a\cos\theta}\, d\theta$$

$$V = \frac{1}{4a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 16a^4\cos^4\theta\, d\theta = 4a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\, d\theta$$

En este caso, la integral $\int \cos^4\theta\, d\theta$ se puede calcular usando la identidad $\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$ en dos ocasiones.

Después de simplificar se obtiene:

$$V = 4a^3\left[\frac{1}{4}\cos^3\theta\,\operatorname{sen}\theta + \frac{3}{4}\int\cos^2\theta\, d\theta\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$V = 4a^3\left[\frac{1}{4}\cos^3\theta\,\operatorname{sen}\theta + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$V = 4a^3\left[\frac{3}{16}\pi\right] = \frac{3}{4}a^3\pi$$

4.28 Hallar el volumen limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2x$.

Solución

Este problema es distinto a los que se han abordado hasta ahora, pues existen dos funciones dependientes z (los problemas anteriores solo contenían una variable dependiente, la cual esta-

ba limitada por cilindros, que eran los limitantes del sólido). En la figura 4.44 se muestra el paraboloide $z = x^2 + y^2$ cortado por el plano $z = 2x$; como se puede observar, ahora el sólido se encuentra entre el paraboloide y el plano, solo que la región de integración no es tan clara como en los ejemplos anteriores.

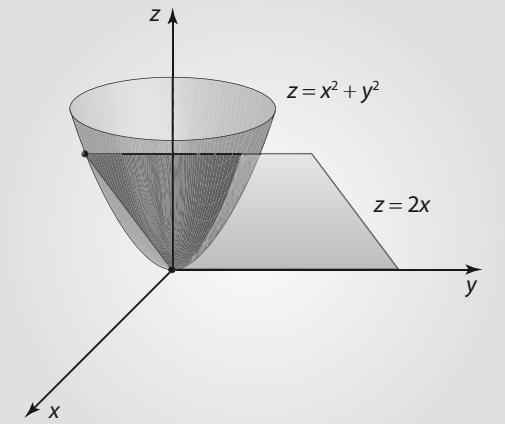


Figura 4.44

Es un hecho que esta región debe ser común a ambas superficies; es decir, deben tener algo en común. Igalando las variables z en ambas ecuaciones se tiene:

$$x^2 + y^2 = 2x$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto se obtiene la ecuación de una circunferencia con centro fuera del origen, $(x-1)^2 + y^2 = 1$, la cual es la curva de intersección y, por ende, la región de integración común. En la figura 4.45 se muestra esta región de integración en el plano xy.

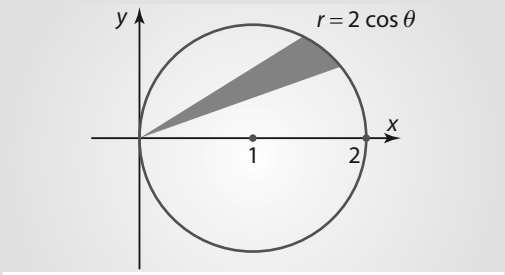


Figura 4.45

Por lo anterior, el uso de coordenadas cilíndricas puede simplificar los cálculos.

Recuérdese que las ecuaciones de transformación en coordenadas cilíndricas son:

$$x = r\cos\theta \quad \textbf{(1)}$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta \quad \textbf{(2)}$$

$$z = z \quad \textbf{(3)}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \textbf{(4)}$$

• ˜ **Para paraboloide: $z = x^2 + y^2$**

Sustituyendo (4) se tiene:

$$z = r^2$$

• ˜ **Para el plano: $z = 2x$**

Sustituyendo (1) se tiene:

$$z = 2\ r\ \cos\theta$$

• ˜ **Para la región de integración: $x^2 + y^2 = 2x$**

Sustituyendo (1) y (4) se tiene:

$$r = 2\cos\theta$$

El volumen puede hallarse así:

$$V = \iiint r\, dz\, dr\, d\theta$$

Los límites de integración en la integral de *dz* inician en el paraboloide $z = r^2$ y terminan en el plano $z = 2r\cos\theta$. Asimismo, aprovechando la simetría es posible calcular el volumen en el primer octante y multiplicar este resultado por dos:

$$V = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_{r^2}^{2r\cos\theta} r\, dz\, dr\, d\theta$$

$$V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\left(2r\cos\theta - r^2\right) r\, dr\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\left(2r^2\cos\theta - r^3\right) dr\, d\theta$$

$$V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2r^3}{3}\cos\theta\Big|_0^{2\cos\theta} - \frac{r^4}{4}\Big|_0^{2\cos\theta}\right) d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{3}8\cos^4\theta\, d\theta\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{16}{2}\cos^4\theta\, d\theta$$

$$V = \frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\, d\theta - 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\, d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\, d\theta$$

$$V = \frac{8}{3}\left[\frac{1}{4}\cos^3\theta\,\operatorname{sen}\theta + \frac{3}{4}\int\cos^2\theta\, d\theta\right]\Bigg]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\left[\frac{1}{4}\cos^3\theta\,\operatorname{sen}\theta + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta\right)\right]\Bigg]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$V = \frac{8}{3}\left[\frac{3}{4}\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{2}$$

4.29 Evaluar la integral cambiando a coordenadas esféricas.

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}}\left(x^2+y^2+z^2\right) dz\, dy\, dx$$

Solución

Como se ve, esta integral está planteada en coordenadas cartesianas, en principio lo más importante es conocer la región de integración, la cual se puede hallar a partir de los límites en cada integral.

- **En la coordenada *z*:**

$z = \sqrt{x^2+y^2}$ Parte superior de un cono

$z = \sqrt{8-x^2-y^2}$ Parte superior de una esfera

- **En la coordenada *y*:**

$y = -\sqrt{4-x^2}$ Parte inferior de una circunferencia de radio 2

$y = +\sqrt{4-x^2}$ Parte superior de una circunferencia de radio 2

- **En la coordenada x:**

$x=-2$ Plano que pasa a -2 unidades

$x=2$ Plano que pasa a 2 unidades

De los sólidos referidos, se puede realizar un bosquejo del sólido en cuestión (véase figura 4.46).

Nótese que en la figura anterior hay una curva común entre el cono y el hemisferio (la cual tiene la misma altura para ambos); esta curva se puede hallar igualando los valores de las variables dependientes de las superficies (las z), es decir,

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{8-x^2-y^2}$$

$$x^2+y^2=8-x^2-y^2$$

o bien,

$$2x^2+2y^2=8$$

$$x^2+y^2=4$$

Ésta representa los límites de integración en la coordenada y dada en la integral inicial. La figura 4.47 muestra esta curva común y la región de integración correspondiente en la integral triple planteada en coordenadas cartesianas.

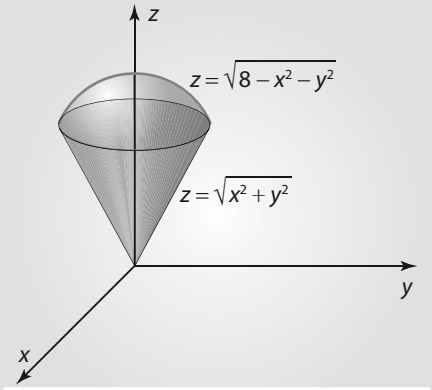


Figura 4.46

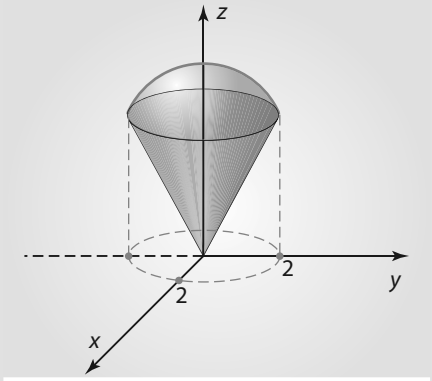


Figura 4.47

El cálculo del volumen es sencillo cuando se usan coordenadas esféricas. Recordando las ecuaciones de transformación:

$$x=\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \qquad \textbf{(1)}$$

$$y=\rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(2)}$$

$$z=\rho \cos\phi \qquad \textbf{(3)}$$

$$\rho^2=x^2+y^2+z^2 \qquad \textbf{(4)}$$

- **Para el cono: $z^2=x^2+y^2$**

Sustituyendo (1), (2) y (3) se tiene:

$$\phi=\frac{\pi}{4}$$

- **Para la esfera: $x^2+y^2+z^2=8$**

Sustituyendo (4) se tiene:

$$\rho=\sqrt{8}$$

En la figura 4.48 se muestra la región de integración en coordenadas esféricas.

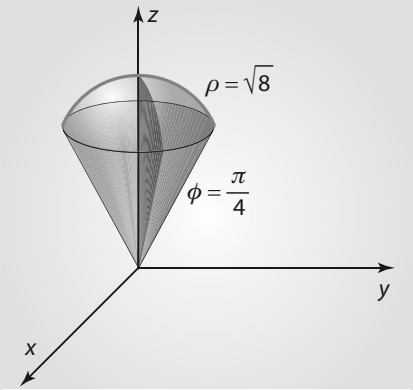


Figura 4.48

Por tanto, la integral triple:

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)dz\,dy\,dx$$

en coordenadas esféricas, toma la forma:

$$\iiint \rho^2\left(\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta\right)$$

o bien,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{8}}\rho^2\rho^2\operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{8}}\rho^4\operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta=\frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\left(\sqrt{8}\right)^5\operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$=\frac{\left(\sqrt{8}\right)^5}{5}\int_0^{2\pi}-\cos\phi\Big|_0^{\pi/4}d\theta=21.20\pi$$

4.30 Evaluar la integral $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,dz\,dx\,dy$ cambiando a coordenadas cilíndricas.

Solución

Al igual que en el problema anterior, esta integral está planteada en coordenadas cartesianas; por ello, es importante conocer la región de integración, la cual se puede hallar a partir de los límites en cada integral.

- **En la coordenada *z*:**

$z=0$ El plano xy

$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ Parte superior de una esfera

- **En la coordenada *x*:**

$x=0$ El plano yz

$x=\sqrt{1-y^2}$ Parte derecha de una circunferencia de radio 1 en el plano xy

- **En la coordenada *y*:**

$y=0$ El plano xz

$y=1$ Plano que pasa en la coordenada $y=1$

De acuerdo con lo anterior es posible realizar un bosquejo del sólido, el cual se encuentra en el primer octante (véase figura 4.49).

La región de integración consiste en un cuarto de círculo de radio 1. Por tanto, en este caso es conveniente usar el sistema de coordenadas cilíndricas (por la forma de la región de integra-

ción). Recuérdese que las ecuaciones de transformación en coordenadas cilíndricas son:

$$x = r\cos\theta \quad \textbf{(1)}$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta \quad \textbf{(2)}$$

$$z = z \quad \textbf{(3)}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \textbf{(4)}$$

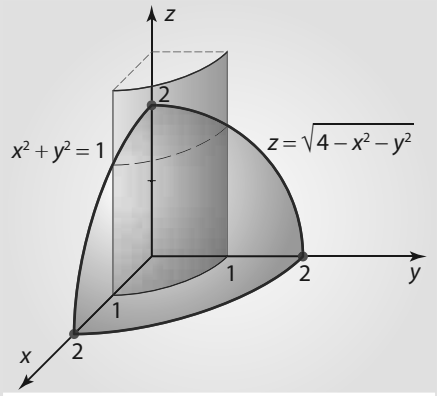


Figura 4.49

- **Para el hemisferio:** $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Sustituyendo (4) se tiene:

$$z = \sqrt{4 - r^2}$$

- **Para el cilindro:** $x^2 + y^2 = 1$

Sustituyendo (4) se tiene:

$$r = 1$$

Por su parte, la integral triple se puede hallar en coordenadas cilíndricas de la siguiente manera:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} z\, dz\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \left(4r - r^3\right) dr\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 d\theta = 0.875\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{0.875}{2}\pi = \frac{7}{16}\pi$$

4.31 Evaluar la integral $\int_0^2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{\sqrt{x-x^2}} (4z+1)\, dy\, dx\, dz$ usando un sistema de coordenadas apropiado.

Solución

La región de integración se puede hallar a partir de los límites en cada integral, como se muestra a continuación.

- **En la coordenada *y*:**

$y = 0$ El plano xz

$y = \sqrt{x - x^2}$ Cilindro circular que se extiende infinitamente hacia z

- **En la coordenada *x*:**

$x = \frac{1}{2}$ Plano que pasa por $x = \frac{1}{2}$

$x = 1$ Plano que pasa por $x = 1$

- **En la coordenada z:**

$$z = 0 \qquad \text{El plano } xy$$

$$z = 2 \qquad \text{Plano que pasa por } z = 2$$

El cilindro tiene centro fuera del origen. Para localizar las coordenadas de dicho cilindro es necesario transformar su ecuación a la forma estándar (completando el trinomio cuadrado perfecto).

$$y^2 = x - x^2$$

$$y^2 + x^2 - x = 0$$

$$y^2 + x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

Las coordenadas del centro son:

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

y el radio es:

$$r = \frac{1}{2}$$

En la figura 4.50 aparece un bosquejo del sólido. Nótese que la región de integración es una cuarta parte de círculo. Un cambio a coordenadas cilíndricas será una buena alternativa para facilitar el cálculo.

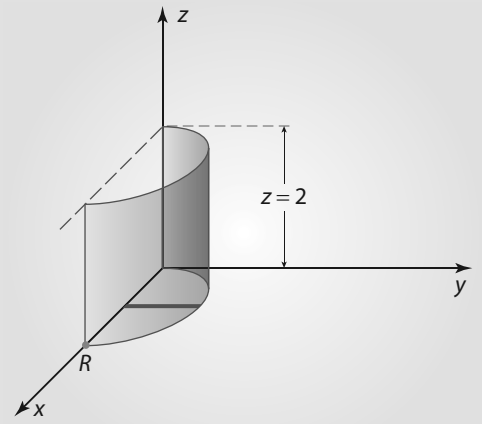


Figura 4.50

Las ecuaciones de transformación en coordenadas cilíndricas son:

$$x = r\cos\theta \qquad \textbf{(1)}$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad \textbf{(2)}$$

$$z = z \qquad \textbf{(3)}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \textbf{(4)}$$

- **Para el plano: $z = 2$**

- **Para el cilindro: $y = \sqrt{x - x^2}$**

Sustituyendo (1) y (2) se tiene:

$$r = \cos\theta$$

- **Para el plano:** $x = \dfrac{1}{2}$

Sustituyendo (1) se tiene:

$$r = \frac{\sec\theta}{2}$$

- **Para el plano:** $x = 1$

Sustituyendo (1) se tiene:

$$r = \sec\theta$$

En la figura 4.51 se aprecia la región de integración en el plano *xy*.

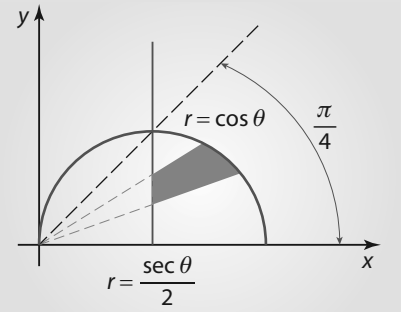


Figura 4.51

La integral triple se puede hallar en coordenadas cilíndricas así:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\sec\theta}{2}}^{\cos\theta} \int_0^2 (4z+1) r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\sec\theta}{2}}^{\cos\theta} r\left(2z^2+z\right)\Big|_0^2 dr \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\sec\theta}{2}}^{\cos\theta} 10r \, dr \, d\theta$$

$$= 10\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2}\Big|_{\frac{\sec\theta}{2}}^{\cos\theta} d\theta = \frac{10}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2\theta - \frac{\sec^2\theta}{4}\right) d\theta$$

$$= \frac{10}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 d\theta - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\theta \, d\theta\right]$$

$$= \frac{10}{2}\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{1}{4}\tan\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right]\frac{10}{2}$$

$$= \frac{5\pi}{8}$$

4.32 La densidad en un punto *P* de una esfera sólida de radio *a,* es directamente proporcional a la distancia de *P* a una recta fija *l* que pasa por el centro de la esfera. Calcular la masa del cuerpo.

Solución

Supóngase una esfera con centro en el origen, cuya ecuación está dada por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. En la figura 4.52 se muestra una porción de la esfera (solo se dibuja el primer octante); asimismo, también aparece la recta *l* que pasa por el centro de la esfera.

La masa está dada por la expresión:

$$m=\iiint \bar{\rho}(x,y,z)\,dV$$

Como se muestra en la figura 4.52, la distancia de un punto cualquiera a la recta l puede calcularse mediante:

$$d=\sqrt{x^2+y^2}$$

Por tanto, la densidad estará dada por:

$$\bar{\rho}(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2}$$

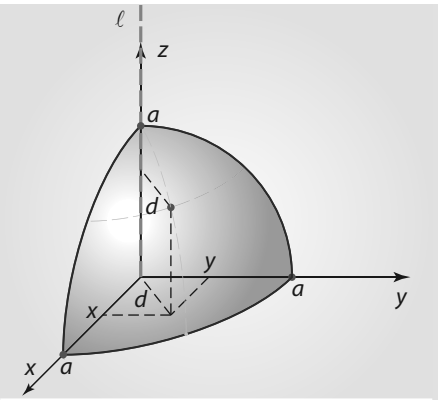


Figura 4.52

donde k es una constante de proporcionalidad que depende del material de que esté hecha la esfera.

Sustituyendo en la integral de masa,

$$m=\iiint k\sqrt{x^2+y^2}\;dz\,dy\,dx$$

La integral anterior puede hallarse utilizando un sistema de coordenadas que simplifique el cálculo. Es posible facilitar este proceso mediante el uso de coordenadas esféricas. Recuérdese que las ecuaciones de transformación son:

$$x=\rho\,\text{sen}\,\phi\,\cos\theta \qquad \textbf{(1)}$$

$$y=\rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta \qquad \textbf{(2)}$$

$$z=\rho\cos\phi \qquad \textbf{(3)}$$

$$\rho^2=x^2+y^2+z^2 \qquad \textbf{(4)}$$

Sustituyendo las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) en la integral de masa se tiene:

$$m=k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\sqrt{\rho^2\,\text{sen}^2\,\phi\cos^2\theta+\rho^2\,\text{sen}^2\,\phi\,\text{sen}^2\,\theta}\;\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\;d\theta$$

$$m=k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\sqrt{\rho^2\,\text{sen}^2\,\phi\left(\cos^2\theta+\text{sen}^2\,\theta\right)}\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$m=k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\rho\,\text{sen}\,\phi\,\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\int_0^{2\pi}k\int_0^{\pi}\frac{1}{4}a^4\,\text{sen}^2\,\phi\,d\phi\,d\theta$$

$$=k\frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\text{sen}^2\,\phi\,d\phi\,d\theta=\frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\phi-\frac{1}{4}\text{sen}\,2\theta\right)\Big|_0^{\pi}d\theta=k\frac{a^4}{4}\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$m=k\frac{a^4}{4}\frac{\pi}{2}(2\pi)=\frac{ka^4\pi^2}{4}$$

4.33 Calcular el momento de inercia con respecto a la recta *l* del sólido del problema anterior. Utilícense coordenadas cilíndricas.

Solución

En la figura 4.53 se muestra el sólido y la distancia a la recta *l*. Del problema anterior se sabe que:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Por tanto, la densidad está dada por:

$$\overline{\rho}(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

Recuérdese que el momento de inercia respecto a la recta *l* puede escribirse como:

$$I_z = \iiint d^2 \overline{\rho}(x, y, z)\, dz\ dy\ dx$$

Teniendo en cuenta lo anterior, la integral triple anterior queda de la siguiente manera:

$$I_z = \iiint \left(x^2 + y^2\right) k\sqrt{x^2 + y^2}\ dz\ dy\ dx$$

Las ecuaciones de transformación en coordenadas cilíndricas son:

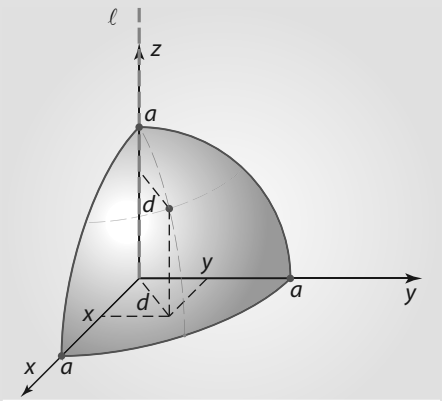


Figura 4.53

$$x = r\cos\theta \quad \textbf{(1)}$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta \quad \textbf{(2)}$$

$$z = z \quad \textbf{(3)}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \textbf{(4)}$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la integral del momento inercia, ésta quedará así (en coordenadas cilíndricas):

$$I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} r^2 kr\, dz(r\, dr\, d\theta)$$

$$I_z = k\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^4\left(\sqrt{a^2 - r^2} + \sqrt{a^2 - r^2}\right) dr\, d\theta$$

$$I_z = 2k\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^4\sqrt{a^2 - r^2}\ dr\, d\theta$$

La integral interna se puede calcular mediante sustitución trigonométrica. Para mostrar lo anterior se sugiere lo siguiente:

$$r = a\,\text{sen}\,t \quad \textbf{(5)}$$

$$dr = a\cos t\, dt \quad \textbf{(6)}$$

Sustituyendo en la integral interna del momento de inercia se tiene:

$$= 2k\int a^4 \operatorname{sen}^4 t\sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2 t}\, a\cos t\, dt = \int a^4 \operatorname{sen}^4 t\sqrt{a^2(1-\operatorname{sen}^2 t)}\, a\cos t\, dt$$

$$= \int a^6 \operatorname{sen}^4 t\cos^2 t\, dt = a^6\int \frac{(1-\cos 2t)^2}{4}\frac{(1-\cos 2t)}{2}\, dt$$

$$= \frac{a^6}{8}\int (1-\cos 2t)(1-\cos 2t)(1+\cos 2t)\, dt = \frac{a^6}{8}\int (1-\cos 2t)(1-\cos^2 2t)\, dt$$

$$= \frac{a^6}{8}\int (1-\cos^2 2t - \cos 2t + \cos^3 2t)\, dt$$

Las integrales de los cosenos cuadrados se pueden hallar utilizando tablas de integración y simplemente colocar los resultados como sigue:

$$\frac{a^6}{8}\left[t - \int_{\text{Tablas}} (\cos 2t)^2\, dt - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + \int_{\text{Tablas}} (\cos 2t)^3\, dt\right]$$

$$\frac{a^6}{8}\left[t - \frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 4t}{8} - \frac{\operatorname{sen}^3 2t}{6}\right] \qquad \textbf{(7)}$$

El resultado anterior puede modificarse con el fin de poder regresar a la variable original sin muchos problemas. Para esto se usarán las siguientes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen} 2A = 2\operatorname{sen} A\cos A \qquad \textbf{(8)}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A \qquad \textbf{(9)}$$

Sustituyendo (8) y (9) en la solución (7),

$$\frac{a^6}{8}\left[\frac{\operatorname{sen}^{-1}\frac{r}{a}}{2} - \frac{2\operatorname{sen} 2t\cos 2t}{8} - \frac{(2\operatorname{sen} t\cos t)^3}{6}\right] \qquad \textbf{(10)}$$

En la figura 4.54 se muestra el triángulo rectángulo que se usará para regresar a la variable original de integración.

Notando que de (5),

$$\operatorname{sen} t = \frac{r}{a}$$

$$\cos t = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a}$$

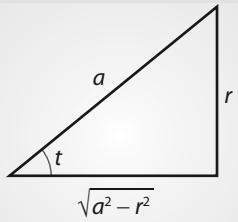


Figura 4.54

Sustituyendo en (10),

$$\frac{a^6}{8}\left[\frac{\operatorname{sen}^{-1}\frac{r}{a}}{2}-4\frac{r}{a}\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a}\left[\frac{a^2-r^2}{a^2}-\frac{r^2}{a^2}\right]-\frac{8}{6}\left(\frac{r\sqrt{a^2-r^2}}{a^2}\right)\right]\Bigg|_0^a$$

$$\frac{a^6}{8}\left[\frac{\pi}{4}\right]$$

Regresando a la integral de momento de inercia,

$$I_z=2k\int_0^{2\pi}\frac{a^6}{32}\pi\,d\theta$$

$$I_z=\frac{2k}{32}a^6\pi(2\pi)=\frac{2}{16}ka^6\pi^2=\frac{ka^6\pi^2}{8}$$

4.34 Calcular la masa del sólido limitado arriba por el hemisferio $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ y abajo por el plano $z=4$, si la densidad en un punto P es inversamente proporcional a la distancia al origen.

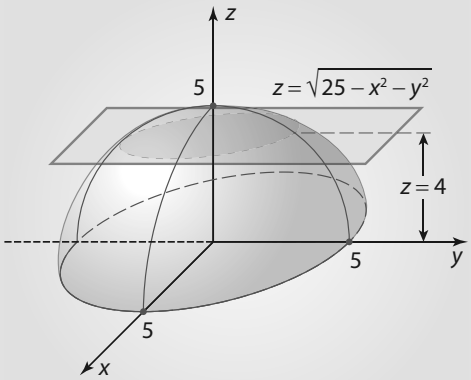


Figura 4.55

Solución

En la figura 4.55 se muestra un bosquejo del sólido, el cual representa un casquete esférico.

Recuérdese que la masa de un sólido se puede hallar mediante la expresión:

$$m=\iiint\overline{\rho}(x,y,z)\,dV$$

Puesto que la densidad tiene una variación inversa de un punto P al origen, se puede escribir:

$$\rho(x,y,z)=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Por la geometría del sólido, se recomienda utilizar un sistema de coordenadas que simplifique los cálculos.

Recordando que las ecuaciones de transformación en coordenadas esféricas son:

$$x=\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \qquad \textbf{(1)}$$

$$y=\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(2)}$$

$$z=\rho\cos\phi \qquad \textbf{(3)}$$

$$\rho^2=x^2+y^2+z^2 \qquad \textbf{(4)}$$

Cambiando las coordenadas para el plano y la esfera se tiene lo siguiente:

Para el plano:

$$z=4$$

Sustituyendo (3) se tiene:

$$\rho = 4\sec\phi$$

- **Para la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 25$**

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

Sustituyendo (4) se tiene:

$$\rho = 5$$

Es muy importante notar que el hemisferio y el plano se cortan a una misma altura (z), o bien a un mismo radio (ρ), por lo que es muy importante establecer esta curva de corte (o bien la coordenadas de corte). Igualando las ecuaciones de la esfera y del plano (en coordenadas esféricas, lo que significa que ambos sólidos comparten la coordenada ρ), se puede escribir:

$$\rho = 4\sec\phi \qquad \textbf{(5)}$$

$$\rho = 5 \qquad \textbf{(6)}$$

Igualando,

$$4 = 5\cos\phi$$

en donde se obtiene el ángulo ϕ, en el cual se cruzan ambos sólidos; así se limita el volumen del cuerpo.

$$\phi = \cos^{-1}\frac{4}{5} \qquad \textbf{(7)}$$

Al sustituir las ecuaciones (1) a la (7) en la integral de masa se obtiene la integral triple que permite hallar la masa del sólido descrito. En la figura 4.56 se muestra el sólido y la forma en que se genera la región de integración en coordenadas esféricas; esta región es la que determina los límites de integración.

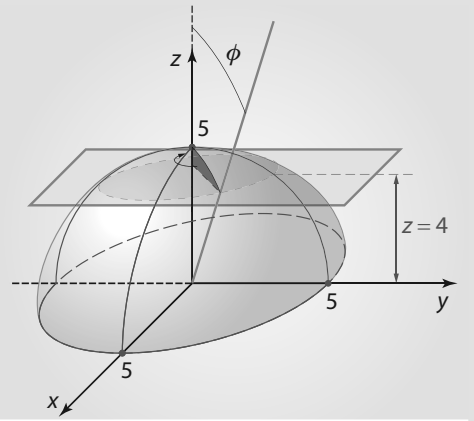


Figura 4.56

$$m = \iiint \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, dz\, dy\, dx$$

$$m = \int_0^{2\pi}\int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)}\int_{4\sec\phi}^{5} \frac{k}{\rho}\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$m = \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)} \left[25 - 16\sec^2\phi\right]\operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$m = \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}(5-4)\, d\theta$$

$$m = \frac{k}{2}(2\pi)$$

$$m = \pi k$$

4.35 Calcular el momento de inercia de un cilindro circular recto homogéneo de altura h y radio de la base a, con respecto al eje del cilindro.

Solución

Suponiendo que el cilindro tiene base circular en el plano xy y se extiende infinitamente hacia el eje z, la ecuación correspondiente es:

$$y^2 + x^2 = a^2$$

Si el cilindro se corta con un plano a una altura z, la ecuación correspondiente a este plano está dada por:

$$z = h$$

En la figura 4.57 se muestra una porción (el primer octante) del cilindro de radio a y altura h.

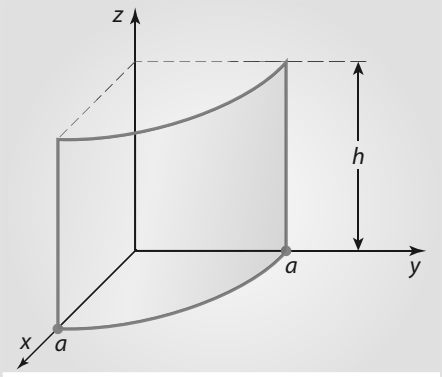


Figura 4.57

Recuérdese que el momento de inercia respecto al eje del cilindro (eje z) está dado por:

$$I_z = \iiint \left(x^2 + y^2\right)\bar{\rho}(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

Considerando que el sólido es homogéneo, la densidad será constante (k). El momento de inercia puede hallarse usando coordenadas cilíndricas, como se ve a continuación.

$$I_z = \iiint r^2 k\, dz\, r\, dr\, d\theta$$

$$I_z = k \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^h r^3\, dz\, dr\, d\theta = k \int_0^{2\pi} \int_0^a hr^3\, dr\, d\theta = kh \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\bigg|_0^a d\theta$$

$$I_z = \frac{kha^4}{4} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{kha^4}{4}(2\pi) = \frac{kha^4\pi}{2}$$

4.36 Plantear y evaluar las integrales necesarias para determinar el centro de masa de un hemisferio homogéneo de radio a.

Solución

Por simplicidad, considérese un hemisferio con centro en el origen, como se muestra en la figura 4.58.

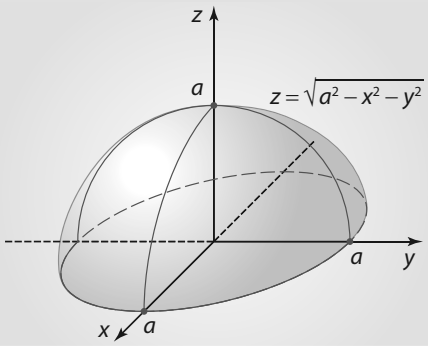


Figura 4.58

La ecuación del hemisferio se puede escribir:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

Las coordenadas del centro de masa se obtienen a partir de las expresiones siguientes:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

donde:

$$M_{xy} = \iiint_D z\rho(x,y,z)\,dV$$

$$M_{xz} = \iiint_D y\rho(x,y,z)\,dV$$

$$M_{yz} = \iiint x\rho(x,y,z)\,dV$$

Es de gran importancia señalar que el hemisferio tiene un eje de simetría (eje z), por lo que las coordenadas:

$$\bar{x} = \bar{y} = 0$$

Como el sólido es homogéneo, la densidad es constante.

$$\bar{\rho}(x,y,x) = k$$

Teniendo en cuenta lo anterior, solo es necesario hallar la masa del sólido:

$$m = \iiint k\bar{\rho}(x,y,z)\,dV$$

así como la integral:

$$M_{xy} = \iiint z\bar{\rho}(x,y,z)\,dV$$

Por la geometría del sólido, es necesario usar un sistema de coordenadas adecuado; en este caso, las esféricas parecen ser una buena alternativa. La masa del hemisferio en coordenadas esféricas puede hallarse de la siguiente manera:

$$m = \iiint k\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

En la figura 4.59 se muestra una cuarta parte del hemisferio, con la partición en coordenadas esféricas; al integrar esta región es necesario multiplicar por cuatro este resultado para hallar la masa total.

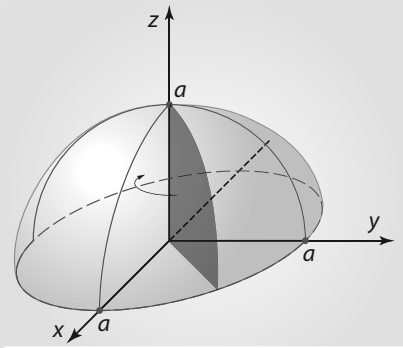


Figura 4.59

Por tanto, para la masa,

$$m = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a} k\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$m = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} k\frac{a^3}{3}\operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$m = 4k\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\, d\theta$$

$$m = 4k\frac{a^3}{3}\frac{\pi}{2}$$

$$m = \frac{2k\pi a^3}{3}$$

La integral M_{xy}, en coordenadas esféricas, se puede hallar de la siguiente forma:

$$M_{xy} = \iiint_D k \underbrace{\rho\cos\phi}_{z} \underbrace{\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta}_{dV}$$

$$M_{xy} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a} k\rho^3 \operatorname{sen}\phi\cos\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$M_{xy} = \frac{1}{4}a^4 k \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\phi\cos\phi \; d\phi \, d\theta \qquad \begin{matrix} u = \operatorname{sen}\phi \\ du = \cos\phi \, d\phi \end{matrix}$$

$$M_{xy} = \frac{1}{4}a^4 k \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\phi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$M_{xy} = \frac{a^4}{8}k\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{a^4}{8}k(2\pi)$$

$$M_{xy} = \frac{a^4}{4}k\pi$$

Por tanto,

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{a^4\pi k}{4}}{\frac{2\pi a^3 k}{3}}$$

$$\bar{z} = \frac{3a}{8}$$

4.37 Sea un sólido homogéneo en el primer octante, acotado por los planos coordenados y las gráficas de $z = 9 - x^2$ y $2x + y = 6$. Encontrar la coordenada $\bar{x}$ del centro de masa del sólido.

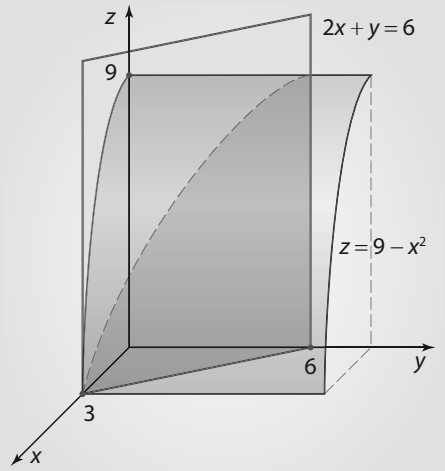


Figura 4.60

Solución

El sólido en cuestión se muestra en la figura 4.60. Éste consiste en un cilindro parabólico que se extiende infinitamente hacia el eje y, cortado por un plano que se prolonga hacia el eje z.

Puesto que el sólido es homogéneo, la densidad es constante.

La coordenada que se piden se obtiene a partir de:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}$$

donde,

$$M = \iiint \rho(x,y,z)\,dV \;\text{ y }\; M_{yz} = \iiint x\rho(x,y,z)\,dV$$

En la figura 4.61 se muestra el área de integración en el plano *xy*.

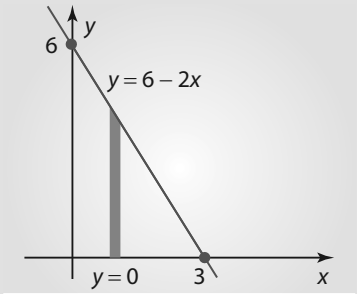


Figura 4.61

La masa del sólido se determina como sigue:

$$M = k\int_0^3\int_0^{6-2x}\int_0^{9-x^2} dz\,dy\,dx = k\int_0^3\int_0^{6-2x}\left(9-x^2\right)dy\,dx$$

$$= k\int_0^3\left(9-x^2\right)y\Big|_0^{6-2x}\,dx = k\int_0^3\left(9-x^2\right)(6-2x)\,dx$$

$$= k\int_0^3\left(54-18x-6x^2+2x^3\right)dx = k\left(54x-\frac{18x^2}{2}-\frac{6x^3}{3}+\frac{2x^4}{4}\right)\Big|_0^3$$

$$= k\left(54(3)-9(9)-2(27)+\frac{1}{2}(3)^4\right) = 67.5\,k$$

Por otro lado,

$$M_{yz} = \iiint x\rho(x,y,z)\,dV = k\int_0^3\int_0^{6-2x}\int_0^{9-x^2} x\,dz\,dy\,dx$$

$$= k\int_0^3\int_0^{6-2x} x\left(9-x^2\right)dy\,dx = k\int_0^3\left(9x-x^3\right)y\Big|_0^{6-2x}\,dx = k\int_0^3\left(9x-x^3\right)(6-2x)\,dx$$

$$= k\int_0^3\left(54x-18x^2-6x^3+2x^4\right)dx = k\left(\frac{54x^2}{2}\Big|_0^3-\frac{18x^3}{3}\Big|_0^3-\frac{6x^4}{4}\Big|_0^3+\frac{2x^5}{5}\Big|_0^3\right)$$

$$= \left[k\left(27(9)-6(27)-121.5+97.2\right)\right] = 56.7k$$

De esta manera,

$$\bar{x} = \frac{56.7k}{67.5k} = 0.84$$

4.38 Hallar el momento de inercia de una esfera de masa *m* y radio *a* respecto a cualquier recta tangente.

Solución

Sea una esfera con centro en el origen. En la figura 4.62 se muestra un bosquejo de la esfera en el primer octante con una recta tangente; por simplicidad, la recta es paralela al eje *z*.

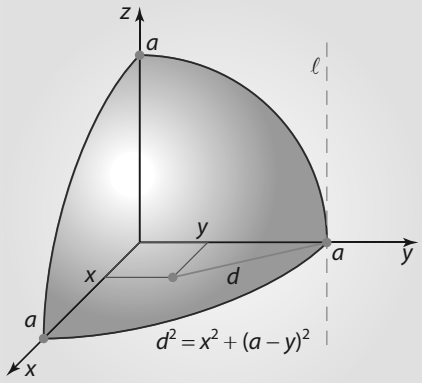


Figura 4.62

La distancia perpendicular de un punto *P* de la esfera a la recta *l* está dada por (véase figura 4.61):

$$d^2 = x^2 + (a-y)^2 \qquad \textbf{(1)}$$

El momento de inercia respecto de la recta l puede escribirse en la siguiente forma:

$$I_i = \iiint d^2\, dV$$

Por simetría es recomendable usar coordenadas cilíndricas.

Al desarrollar el binomio de la ecuación (1) y recordar que las ecuaciones de transformación son:

$$x = r\cos\theta \quad \textbf{(2)}$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta \quad \textbf{(3)}$$

$$z = z \quad \textbf{(4)}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \textbf{(5)}$$

Sustituyendo (3) y (5) en la ecuación desarrollada (1),

$$d^2 = x^2 + a^2 - 2ay + y^2$$

$$d^2 = r^2 - 2ar\,\text{sen}\,\theta + a^2 \quad \textbf{(6)}$$

La ecuación de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, en coordenadas cilíndricas, tiene la forma:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - r^2} \quad \textbf{(7)}$$

El momento de inercia en coordenadas cilíndricas puede escribirse así:

$$I_l = \iiint d^2 \left(dz\, r\, dr\, d\theta\right)$$

$$I_l = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} \left(r^2 - 2ar\,\text{sen}\,\theta + a^2\right) dz\, r\, dr\, d\theta$$

$$I_l = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \left(r^2 - 2ar\,\text{sen}\,\theta + a^2\right) 2\sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

Al evaluar las integrales mediante sustitución trigonométrica se tiene:

$$I_l = \int_0^{2\pi} 2\left(\frac{2a^5}{15} - \frac{2a^5\pi}{16}\,\text{sen}\,\theta + \frac{a^5}{3}\right) d\theta$$

$$I_l = \frac{28\pi a^5}{15}$$

4.39 Ubicar el centroide del sólido homogéneo limitado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la parte superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

Solución

El sólido consiste de una esfera con centro fuera del origen cortada por la parte superior de un cono.

Por la forma del sólido es recomendable utilizar coordenadas esféricas (véase figura 4.63).

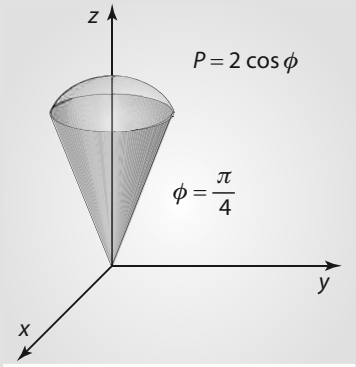


Figura 4.63

Recordando las ecuaciones de transformación,

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \quad \textbf{(1)}$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \quad \textbf{(2)}$$

$$z = \rho \cos\phi \quad \textbf{(3)}$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \textbf{(4)}$$

- **Para el cono:** $z^2 = x^2 + y^2$

Sustituyendo (1), (2) y (3) se tiene:

$$\phi = \frac{\pi}{4}$$

- **Para la esfera:** $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$

Sustituyendo (3) y (4) se tiene:

$$\rho = 2\cos\phi$$

La coordenada $\bar{z}$ está dada por:

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Donde,

$$M_{xy} = \iiint_D z\rho(x, y, z)\, dV$$

La masa puede plantearse en coordenadas esféricas de la siguiente manera:

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\cos\phi} k\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= k\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8\cos^3\phi \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta = -\frac{8}{3}k \int_0^{2\pi} \frac{\cos^4\phi}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = -\frac{2}{3}k \int_0^{2\pi} (-0.75)\, d\theta$$

$$m = \frac{1}{2}(2k\pi) = k\pi$$

Asimismo,

$$M_{xy}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\cos\phi} k\rho\cos\phi\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\int_0^{2\pi}k\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\cos\phi}\rho^3\cos\phi\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$=k\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}\left(16\cos^4\phi\right)\cos\phi\,\text{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta=4k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\cos^5\phi\,\text{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta$$

$$M_{xy}=-4k\int_0^{2\pi}\frac{\cos^6\phi}{6}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=-\frac{4}{6}k\left(-\frac{7}{8}\right)d\theta$$

$$M_{xy}=\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{7}{8}\right)(2\pi)k=\frac{28}{24}k\pi=\frac{7}{6}\pi k$$

$$\bar{z}=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{\frac{7k\pi}{6}}{\pi k}=\frac{7}{6}$$

4.40 Hallar el volumen limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y el paraboloide $x^2+y^2=3z$.

Solución

En la figura 4.64 se muestra el sólido en el primer octante.

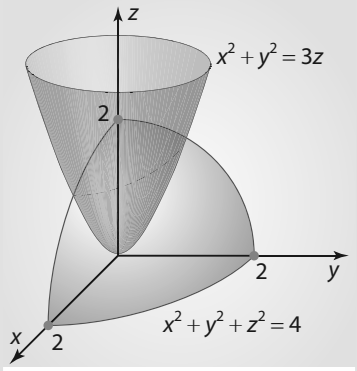


Figura 4.64

Usando coordenadas cilíndricas, el paraboloide y la esfera tienen las ecuaciones siguientes:

$$z=\frac{r^2}{3} \qquad \textbf{(1)}$$

$$z=\sqrt{4-r^2} \qquad \textbf{(2)}$$

La región de integración debe ser común a las dos superficies; por tanto, igualando la variable dependiente z en ambos sólidos se tiene:

$$\frac{r^2}{3}=\sqrt{4-r^2} \qquad \textbf{(3)}$$

$$\frac{r^4}{9}=4-r^2 \qquad \textbf{(4)}$$

$$r=\sqrt{3} \qquad \textbf{(5)}$$

De este modo, la curva común a ambas superficies es una circunferencia de $r=\sqrt{3}$, la cual es la región de integración.

El volumen está dado en coordenadas cilíndricas mediante la siguiente expresión:

$$V=\iiint r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\left(r\sqrt{4-r^2}-\frac{r^3}{3}\right)dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} r\sqrt{4-r^2}\,dr\,d\theta-\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} r^3\,dr\,d\theta$$

$$u=4-r^2,\quad du=-2r\,dr$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{3}}d\theta-\frac{1}{12}\int_0^{2\pi} r^4\Big|_0^{\sqrt{3}}d\theta$$

$$=-\frac{1}{3}[1-8]\int_0^{2\pi}d\theta-\frac{9}{12}(2\pi)$$

$$=\frac{14}{3}\pi-\frac{18}{12}\pi=\frac{14}{3}\pi-\frac{9}{6}\pi=\left(\frac{28-9}{6}\right)\pi=\frac{19}{6}\pi$$

Capítulo

5

Integración de campos



Problemas resueltos

A continuación se presentan los problemas para resolver con su solución detallada.

5.1 Evaluar las siguientes integrales de línea:

a) $\int_C G(x, y)\, dx$

b) $\int_C G(x, y)\, dy$

c) $\int_C G(x, y)\, ds$

donde $G(x, y) = 2xy$ a lo largo de la curva C, cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 5 \cos t$ y $y = 5$ sen t para los valores de $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.

Solución

Sustituyendo las ecuaciones paramétricas en las integrales de línea dadas y usando las integrales (5.20), (5.21) y (5.22) resulta:

a) $$\int_C G(x,y)\,dx = \int_C 2(5\cos t)(5\operatorname{sen} t)(-5\operatorname{sen} t)\,dt = -250\int \operatorname{sen}^2 t\cos t\,dt = \frac{-250\operatorname{sen}^3 t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

b) $$\int_C G(x,y)\,dy = \int_C 2(5\cos t)(5\operatorname{sen} t)(5\cos t)\,dt = 250\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\operatorname{sen} t\,dt = \frac{-250\cos^3 t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

c) $$\int_C G(x,y)\,ds = \int_C 50\cos t\operatorname{sen} t\sqrt{(-5\operatorname{sen} t)^2+(5\cos t)^2}\,dt = 5(50)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t\operatorname{sen} t\,dt = \frac{5(50)\operatorname{sen}^2 t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

Se deja al lector evaluar los resultados de las integrales en los límites dados.

5.2 Evaluar la integral de línea $\int_C (2x+y)\,dx + xy\,dy$ a lo largo de $y = x+3$, entre los puntos $P(-1, 2)$ y $Q(2, 5)$.

Solución

En la figura 5.1 se muestra una porción de la recta entre los puntos P y Q.

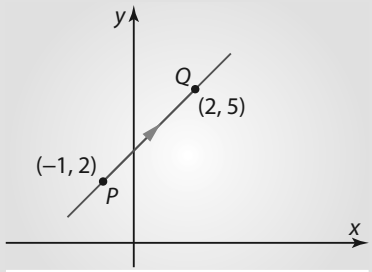


Figura 5.1

Tomando a x como parámetro, y después de sustituir la ecuación de la recta en la integral de línea, se tiene:

$$\int_C (2x+x+3)\,dx + x(x+3)\,dy$$

$$y = x+3 \Rightarrow dy = dx$$

$$\int_C (3x+3)\,dx + (x^2+3x)\,dx = 3\int_{-1}^{2}(x+1)\,dx + \int_{-1}^{2} x^2\,dx + 3\int_{-1}^{2} x\,dx$$

$$= \frac{3(x+1)^2}{2}\Big|_{-1}^{2} + \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} + \frac{3x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} = 13.5+3+4.5 = 21$$

5.3 Evaluar $\int_C (2x+y)\,dx + xy\,dy$ en la curva que se muestra.

En la figura 5.2 se observa que la trayectoria es una curva aislada parte por parte, por lo que es necesario dividirla en dos porciones: las curvas C_1 y C_2.

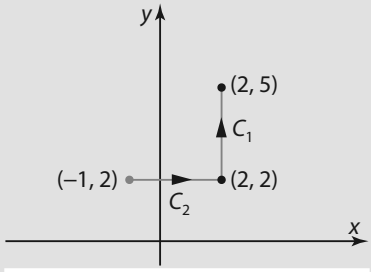


Figura 5.2

• **Para la curva C_1**

Es una recta horizontal cuya representación es $y = 2$ y su diferencial es $dy = 0$.

Tomando a x como parámetro se puede escribir:

$$\int_{C_1} (2x + y)\,dx + xy\,dy = \int_{C_1} (2x + 2)\,dx + x(2)(0) = 2\int_{1}^{2} (x + 1)\,dx = (x + 1)^2\Big|_{-1}^{2} = 9$$

• **Para la curva C_2**

Es una recta vertical cuya representación es $x = 2$ y su diferencial es $dx = 0$.

Tomando a y como parámetro se puede escribir:

$$\int_{C_2} (2x + y)\,dx + xy\,dy = \int_{C_2} (4 + y)0 + 2y\,dy = \int_{2}^{5} 2y\,dy = y^2\Big|_{2}^{5} = 25 - 4 = 21$$

Con base en lo anterior, la integral de línea completa es la suma de las integrales calculadas anteriormente como sigue:

$$\int_{C} (2x + y)\,dx + xy\,dy = 9 + 21 = 30$$

5.4 Evaluar $\int_C y\,dx + x\,dy$ a lo largo de la parábola $y = x^2$ entre los puntos (0, 0) y (1, 1).

Solución

En la figura 5.3 se muestra la curva C y la porción entre los puntos dados.

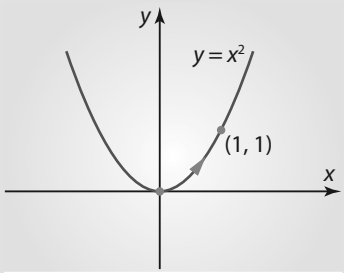


Figura 5.3

Usando a x como parámetro y sustituyendo en la integral de línea dada resulta:

$$\int_C y\,dx + x\,dy = \int_C x^2\,(dx) + x(2x)\,dx = \int_C x^2\,dx + 2x^2\,dx$$

$$\int_0^1 x^2\,dx + 2\int_0^1 x^2\,dx = 3\int_0^1 x^2\,dx = x^3\Big|_0^1 = 1$$

5.5 Evaluar $\int_C (6x^2 + 2y^2)\,dx + 4xy\,dy$ donde la curva C está representada por las ecuaciones paramétricas $x = \sqrt{t}$ y $y = t$, en el intervalo $4 \le t \le 9$.

Solución

A partir de las ecuaciones paramétricas se puede escribir:

• **Primera ecuación paramétrica:**

$$x = t^{\frac{1}{2}}$$

$$dx = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

$$dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

- **Segunda ecuación paramétrica:**

$$y = t$$

$$dy = dt$$

Así, la integral de línea será:

$$\int_C \left[\frac{\left(6t + 2t^2\right) dt}{2\sqrt{t}} + 4\sqrt{t}\, t\, dt \right] = \int_C \left(3\sqrt{t} + t^{\frac{3}{2}} \right) dt + 4\int_C t^{\frac{3}{2}}\, dt$$

$$= 3\int_4^9 t^{\frac{1}{2}}\, dt + \int_4^9 t^{\frac{3}{2}}\, dt + 4\int_4^9 t^{\frac{3}{2}}\, dt = 3\int_4^9 t^{\frac{1}{2}}\, dt + 5\int_4^9 t^{\frac{3}{2}}\, dt = 2t^{\frac{3}{2}}\Big|_4^9 + 2t^{\frac{5}{2}}\Big|_4^9 = 38 + 422 = 460$$

5.6 Hallar el valor de $\oint_C \left(x^2 + y^2\right) dx - 2xy\, dy$ en la curva cerrada simple que se muestra en la figura 5.4.

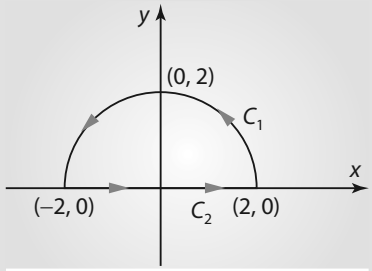


Figura 5.4

Solución

La curva es aislada parte por parte, por lo que puede dividirse en las curvas C_1 y C_2 que se muestran en las figuras 5.5 y 5.6.

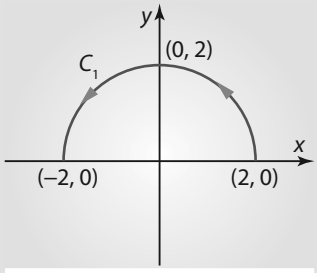


Figura 5.5

Sea C_2:

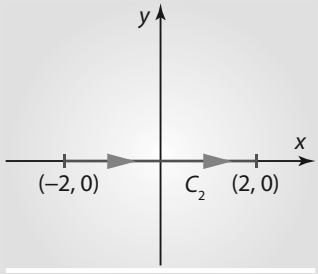


Figura 5.6

- **Para la curva C_1**

Como se ve en la figura 5.5, la curva es la mitad de una circunferencia de radio 2; por tanto, su parametrización puede escribirse como:

$$x = 2\cos t \text{ y } y = 2 \operatorname{sen} t$$

Sustituyendo estas ecuaciones paramétricas en la integral inicial se tiene:

$$\int_{C_1}\left(x^2+y^2\right)dx-2xy\,dy=$$

$$\int_{C_1}4(-2)\,\text{sen}\,t\,dt-2\left(2\cos t\right)\left(2\,\text{sen}\,t\right)2\cos t\,dt=$$

$$\int_{C_1}-8\,\text{sen}\,t\,dt-16\cos^2 t\,\text{sen}\,t\,dt=\int_{C_1}-8\,\text{sen}\,t\,dt-16\int_{C_1}\cos^2 t\,\text{sen}\,t\,dt$$

Como se indicó antes, para obtener los límites de integración es importante notar el sentido de integración. En este caso, el sentido de la integración es contrario al de las manecillas del reloj; por tanto, de las ecuaciones paramétricas se puede deducir lo siguiente:

Si,

$$x=2\Rightarrow t=0$$

Asimismo,

$$\text{Si } x=-2\Rightarrow t=\pi$$

Por tanto, se puede escribir:

$$=-8\int_0^{\pi}\text{sen}\,t\,dt-16\int_0^{\pi}\cos^2 t\,\text{sen}\,t\,dt$$

$$=8\cos t\Big|_0^{\pi}+\frac{16\cos^3 t}{3}\Big|_0^{\pi}=-\frac{80}{3}$$

- **Para la curva C_2**

La curva es la ecuación de una recta horizontal cuya ecuación y diferencial están dadas como $y=0$ y $dy=0$, respectivamente.

Usando a x como parámetro, la integral inicial se puede escribir así:

$$\int_{C_2}\left(x^2+y^2\right)dx\;-2xy\,dy=\int_{C_2}x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

Por último, la integral cerrada es igual a la suma de las integrales calculadas antes:

$$\oint\left(x^2+y^2\right)dx-2xy\,dy=\int_{C_1}+\int_{C_2}=-\frac{64}{3}$$

5.7 Hallar el valor de la integral cerrada $\oint_C x^2 y^3\,dx - xy^2\,dy$ donde C es el cuadrado con vértices $(1, 1)$ $(-1, 1)$ $(-1, -1)$ y $(1, -1)$, como se muestra en la figura 5.7.

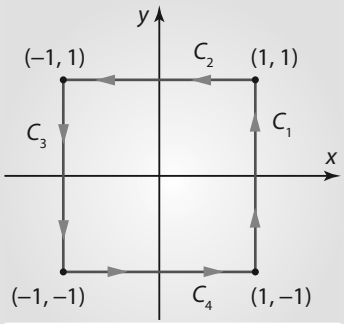


Figura 5.7

Solución

Nótese que la curva cerrada es aislada parte por parte, por lo que se puede dividir en las curvas C_1, C_2, C_3 y C_4.

- **Para C_1**

Esta curva es una recta vertical cuya ecuación y diferencial se escriben como $x = 1$ y $dx = 0$, respectivamente.

Sustituyendo en la integral de línea dada y usando a y como variable de integración se tiene:

$$\int_{C_1} x^2 y^3\,dx - xy^2\,dy = -\int_{C_1} y^2\,dy = -\int_{-1}^{1} y^2\,dy$$

$$= \frac{-y^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

- **Para C_2**

Esta curva es una recta horizontal cuya ecuación y diferencial se escriben como $y = 1$ y $dy = 0$, respectivamente.

Sustituyendo en la integral de línea dada y usando a x como variable de integración se tiene:

$$\int_{C_2} x^2 y^3\,dx - xy^2\,dy = \int_{C_2} x^2\,dx = \int_{1}^{-1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{1}^{-1} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

- **Para C_3**

Esta curva es una recta vertical cuya ecuación y diferencial se escriben como $x = -1$ y $dx = 0$, respectivamente.

Sustituyendo en la integral de línea dada y usando a y como variable de integración se tiene:

$$= +\int_{C_3} y^2\,dy = \int_{1}^{-1} y^2\,dy = \frac{y^3}{3}\Big|_{1}^{-1} = -\frac{2}{3}$$

- **Para C_4**

Esta curva es una recta horizontal cuya ecuación y diferencial se escriben como $y = -1$ y $dy = 0$, respectivamente.

Sustituyendo en la integral de línea dada y usando a x como variable de integración se tiene que el valor de esta integral es $-\frac{2}{3}$.

Finalmente, el valor de la integral cerrada se puede hallar como sigue:

$$\oint x^2y^3\,dx - xy^2\,dy = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} = -\frac{2}{3}(4) = -\frac{8}{3}$$

5.8 Evaluar $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ a lo largo de los segmentos de recta de (0, 0, 0) a (2, 3, 4) y de (2, 3, 4) a (6, 8, 5).

Solución

Primero es necesario encontrar la ecuación de cada recta en el espacio y evaluar la integral dada de la siguiente manera:

- **Recta 1**

Recuérdese que la ecuación de una recta en forma paramétrica se puede escribir como:

$$x = x_1 + a_1t$$
$$y = y_1 + a_2t$$
$$z = z_1 + a_3t$$

donde $P(x_1, y_1, z_1)$ representa un punto sobre la recta y $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ representa el vector que le da dirección a la recta.

En la recta 1, $P_1(0, 0, 0)$, $\vec{a} = \langle 2, 3, 4 \rangle$ por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$x = 2t$$
$$y = 3t \qquad \textbf{(1)}$$
$$z = 4t$$

Sustituyendo en la integral inicial y usando a t como parámetro se tiene:

$$\int_{C_1} y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_{C_1} 3t(2)\,dt + 4t(3\,dt) + 2t(4\,dt)$$

Para encontrar los límites de integración es necesario precisar el sentido durante el recorrido a lo largo de la curva; en este caso se recorre del punto (0, 0, 0) al punto (2, 3, 4), por lo que a partir de las ecuaciones paramétricas (1), si x, y, z son cero en el punto inicial, se concluye que $t = 0$. De forma semejante, si el punto final es (2, 3, 4), el valor de t es 1. Lo anterior permite escribir la integral así:

$$\int_0^1 (6t\,dt + 12t\,dt + 8t\,dt) = \frac{6t^2}{2}\bigg|_0^1 + \frac{12t^2}{2}\bigg|_0^1 + \frac{8t^2}{2}\bigg|_0^1 = 3 + 6 + 4 = 13$$

- **Recta 2**

En esta recta el vector director es $\vec{a}=\langle 4,5,1\rangle$ y el punto sobre la recta es $P_2(2, 3, 4)$.

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta 2 son:

$$\begin{aligned} x &= 2+4t \\ y &= 3+5t \\ z &= 4+t \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

Sustituyendo en la integral inicial y usando a t como parámetro, resulta:

$$\int_{C_2} y\,dx+z\,dy+x\,dz=\int_{C_2}(3+5t)4\,dt+(4+t)5\,dt+(2+4t)\,dt$$

Al igual que en el caso de la recta 1, los límites de integración se pueden encontrar notando que el recorrido inicia en el punto (2, 3, 4) y finaliza en el (6, 8, 5), por lo que a partir de las ecuaciones paramétricas (2), si *x, y, z* son (2, 3, 4) en el punto inicial, se concluye que $t=0$. De forma semejante, si el punto final es (6, 8, 5), el valor de t es 1. Lo anterior permite escribir la integral de la siguiente manera:

$$\int_0^1 4(3+5t)\,dt+5(4+t)\,dt+(2+4t)\,dt=4\int_0^1(3+5t)\,dt+5\int_0^1(4+t)\,dt+\int_0^1(2+4t)\,dt$$

Al evaluar resulta:

$$=\frac{4}{5}\frac{(3+5t)^2}{2}\bigg|_0^1+\frac{5(4+t)^2}{2}\bigg|_0^1+\frac{1}{4}\frac{(2+4t)^2}{2}=\frac{4}{10}(3+5t)^2\bigg|_0^1+\frac{5}{2}(4+t)^2\bigg|_0^1+\frac{1}{8}(2+4t)^2\bigg|_0^1$$

$$=(25.6+62.5+4.5)-(3.6+40+0.5)=48.5$$

Por último, la integral de línea a lo largo de las dos rectas se puede escribir como sigue:

$$\int_C y\,dx+z\,dy+x\,dz=\int_{C_1}+\int_{C_2}=13+48.5=61.5$$

5.9 Hallar el trabajo realizado por el campo vectorial $\vec{F}(x,y)=y^3\hat{\mathbf{i}}-x^2y\hat{\mathbf{j}}$ a lo largo de la curva dada en forma vectorial por la ecuación $\vec{r}(t)=e^{-2t}\hat{\mathbf{i}}+e^t\hat{\mathbf{j}}$ en el intervalo $0\le t\le \ln 2$.

Solución

El trabajo se define en forma vectorial como:

$$W=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$$

De la función vectorial $\vec{r}(t)=e^{-2t}\hat{\mathbf{i}}+e^t\hat{\mathbf{j}}$ se nota que las ecuaciones paramétricas de la trayectoria son:

$$x=e^{-2t} \text{ y } y=e^t$$

Al sustituir las ecuaciones paramétricas en el campo de fuerzas y la función vectorial en la definición vectorial de trabajo se tiene:

$$= \int_C \left(e^{3t}\hat{\mathbf{i}} - e^{-4t}e^{t}\hat{\mathbf{j}}\right) \cdot \left(-2e^{-2t}\hat{\mathbf{i}} + e^{t}\hat{\mathbf{j}}\right) dt = \int_C -2e^{t}\, dt + \int_C -e^{-2t}\, dt$$

$$= \int_0^{\ln 2} -2e^{t}\, dt + \int_0^{\ln 2} -e^{-2t}\, dt = -2.375$$

5.10 Hallar el trabajo que realiza el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = 2xy\hat{\mathbf{i}} - 3x\hat{\mathbf{j}}$ a lo largo de la curva dada por la función vectorial $\vec{R}(t) = 3t^2\hat{\mathbf{i}} - t\hat{\mathbf{j}}$ en el intervalo $0 \le t \le 1$.

Solución

Como es sabido, el trabajo se define en forma vectorial como:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy$$

A partir de la función vectorial $\vec{R}(t) = 3t^2\hat{\mathbf{i}} - t\hat{\mathbf{j}}$ se nota que las ecuaciones paramétricas de la trayectoria son:

$$x = 3t^2 \text{ y } y = -t$$

Al sustituir las ecuaciones paramétricas anteriores en la ecuación del campo vectorial y notar que $d\vec{r} = \left(6t\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}\right) dt$ se puede escribir:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \left[2\left(3t^2\right)(-t)\hat{\mathbf{i}} - 3\left(3t^2\right)\hat{\mathbf{j}}\right] \cdot \left[6t\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}\right] dt$$

$$= -36\int_C t^4\, dt + 9\int_C t^2\, dt = -36\int_0^1 t^4\, dt + 9\int_0^1 t^2\, dt = \left.\frac{-36t^5}{5}\right|_0^1 + \left.\frac{9t^3}{3}\right|_0^1$$

$$= -\frac{36}{5} + 3 = -\frac{21}{5}$$

5.11 Hallar el trabajo que realiza el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (x-y)\hat{\mathbf{i}} + (y+x)\hat{\mathbf{j}}$ a lo largo de la trayectoria cerrada en la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en el sentido de las manecillas del reloj.

Solución

Las ecuaciones paramétricas de la circunferencia se pueden representar así:

$$x = 2\cos t$$

$$y = 2\,\text{sen}\, t \qquad \textbf{(1)}$$

Sustituyendo las ecuaciones paramétricas en el campo vectorial dado resulta:

$$\vec{F} = \left(2\cos t - 2\,\text{sen}\, t\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(2\cos t + 2\,\text{sen}\, t\right)\hat{\mathbf{j}}$$

El vector de posición de la trayectoria es de la forma:

$$\vec{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$$

Al sustituir las ecuaciones paramétricas (1) en el vector de posición y obtener su diferencial se puede escribir:

$$r(t) = 2\cos t\,\hat{\mathbf{i}} + 2\operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$dr = \left[-2\operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{i}} + 2\cos t\,\hat{\mathbf{j}}\right] dt$$

El trabajo del campo vectorial se puede obtener a partir de su definición, es decir,

$$\int_C F \cdot d\vec{r} = \int_C \left\{\left[2\cos t - 2\operatorname{sen} t\right]\hat{\mathbf{i}} + \left[2\cos t + 2\operatorname{sen} t\right]\hat{\mathbf{j}}\right\} \cdot \left\{-2\operatorname{sen} t\,\hat{\mathbf{i}} + 2\cos t\,\hat{\mathbf{j}}\right\} dt$$

$$= \int_C -4\operatorname{sen} t\cos t\, dt + 4\int_C \operatorname{sen}^2 t\, dt + \int_C 4\cos^2 t\, dt + 4\int_C \operatorname{sen} t\cos t\, dt$$

Simplificando,

$$= 4\int_C \operatorname{sen}^2 t\, dt + 4\int \cos^2 t\, dt$$

$$= 4\int_C \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt + 4\int \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt$$

$$= 4\int_C dt$$

Para determinar los límites de integración es necesario conocer un punto de inicio, ya que éste será el punto final. Por ejemplo, considérese el punto $P(2, 0)$ hasta regresar de nuevo a este mismo punto. Lo anterior se puede escribir así: si inicia en $x = 2$, de las ecuaciones paramétricas (1) se deduce que de $x = 2\cos t$ se obtiene $t = 0$.

De forma semejante, si el punto final es $x = 2$, de $x = 2\cos t$ se obtiene $t = 2\pi$; por tanto, al sustituir estos límites en la integral que determina el trabajo del campo vectorial se concluye que:

$$4\int_0^{2\pi} dt = 4t\Big|_0^{2\pi} = 8\pi$$

Capítulo

6

Ecuaciones diferenciales



Problemas resueltos

A continuación se presentan los problemas para resolver del capítulo con su solución detallada.

6.1 Resolver:

$$(y^2 + yx)\,dx - x^2\,dy = 0$$

Solución

Como se puede observar, la ecuación tiene la forma:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

Notar que los coeficientes son homogéneos de grado 2, por lo que es posible usar la sustitución:

$$y = ux$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial dada se tiene:

$$(u^2x^2 + ux^2)\,dx - x^2(u\,dx + x\,du) = 0$$

Realizando los productos indicados y simplificando se tendrá:

$$u^2x^2\,dx = x^3\,du$$

Separando variables e integrando se obtiene:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{u^2}$$

$$\ln|x| = -\frac{1}{u} + c$$

La solución obtenida está en términos de u, por lo que es necesario regresar a las variables originales mediante la sustitución utilizada:

$$u = \frac{y}{x}$$

Por último, se puede escribir:

$$\ln|x| = -\frac{x}{y} + c$$

6.2 Resolver:

$$y\frac{dx}{dy} = x + 4ye^{-\frac{2x}{y}}$$

Solución

La ecuación puede escribirse en la forma:

$$y\,dx = \left(x + 4ye^{-\frac{2x}{y}}\right)dy$$

En este caso es posible reconocer que la ecuación tiene coeficientes homogéneos de grado uno; así, haciendo $x = vy$ y sustituyendo,

$$y(v\,dy + y\,dv) = (vy + 4ye^{-2v})\,dy$$

Realizando los productos, simplificando y separando variables se tiene:

$$\frac{dv}{e^{-2v}} = \frac{4\,dy}{y}$$

Integrando en ambos lados,

$$\frac{1}{2}e^{2v} = 4\ln|y| + c$$

Regresando a la variable original y recordando que $v = \frac{x}{y}$ se tiene:

$$\frac{1}{2}e^{\frac{2x}{y}} = 4\ln|y| + c$$

o bien,

$$e^{\frac{2x}{y}} = 8\ln|y| + c$$

6.3 Resolver:

$$\left(y + x\cot\frac{y}{x}\right)dx - x\,dy = 0$$

Solución

Notando que los coeficientes son homogéneos de grado uno, se puede usar la sustitución:

$$y = ux$$

donde,

$$dy = udx + xdu$$

Sustituyendo,

$$(ux + x\cot u)dx - x(udx + xdu) = 0$$

Realizando los productos indicados y simplificando,

$$x\cot u\,dx - x^2du = 0$$

$$\cot u\,dx - xdu = 0$$

Separando variables,

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\cot u} = \tan u\,du$$

Integrando en ambos lados,

$$\ln x = \int \tan u\,du = \ln|\sec u| + c$$

Regresando a la variable original,

$$\ln|x| = \ln\left|\sec\frac{y}{x}\right| + c$$

6.4 Resolver la ecuación diferencial dada:

$$2x^2\frac{dy}{dx} = 3xy + y^2$$

Solución

La ecuación dada se puede escribirse en la forma:

$$2x^2dy = (3xy + y^2)dx$$

Nótese que los coeficientes son homogéneos de grado dos, por lo que es posible usar:

$$y = ux$$

Sustituyendo se tiene:

$$2x^2\,(udx + xdu) = (3x^2u + u^2x^2)dx$$

Realizando los productos indicados,

$$2ux^2dx + 2x^3du = 3x^2udx + u^2x^2dx$$

Simplificando,

$$2x^3du = x^2udx + u^2x^2dx$$
$$2xdu = dx(u + u^2)$$

Separando variables,

$$\frac{2\,du}{u+u^2} = \frac{dx}{x}$$

Integrando en ambos lados,

$$\ln x = 2\int \frac{du}{u(1+u)} = \int\left[\frac{A}{u} + \frac{B}{1+u}\right]du$$

Nótese que la integral del segundo miembro debe realizarse mediante la descomposición en fracciones parciales (simples) como sigue:

$$\frac{A}{u} + \frac{B}{1+u} = \frac{A + Au + Bu}{u(1+u)} = \frac{A + u(A+B)}{u(1+u)} \Rightarrow \begin{array}{l} A+B=0 \\ A=1 \Rightarrow B=-1 \end{array}$$

Luego, se puede escribir:

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} = \int\frac{du}{u} - \int\frac{du}{u+1}$$

Usando propiedades de los logaritmos en el segundo miembro se tiene:

$$\frac{1}{2}\ln|x| = \ln\left|\frac{u}{1+u}\right| + \ln c$$

Eliminando los logaritmos y regresando a la variable original,

$$x^{\frac{1}{2}} = \frac{c\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

6.5 Resolver:

$$(2y^2x - 3)dx + (2yx^2 + 4)dy = 0$$

Solución

Es importante resaltar que la ecuación no es de variables separables, ni tampoco de coeficientes homogéneos (verificar el grado de cada coeficiente), por lo que es necesario comprobar si proviene de una diferencial exacta. Recuérdese que una ecuación es exacta si tiene la forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Además,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Realizando la prueba para la ecuación diferencial dada,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4yx$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 4xy$$

Por tanto, es exacta, lo que implica que se busca una función f tal que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2x - 3 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2 + 4 \qquad \textbf{(2)}$$

De la ecuación (1) se puede hallar la función f, separando variables como sigue:

$$\partial f = (2y^2x - 3)\,dx$$

Integrando parcialmente respecto de x,

$$f = \int \left(2y^2x - 3\right) dx$$

$$f = y^2x^2 - 3x + g(y) \qquad \textbf{(3)}$$

Para encontrar la función $g(y)$ es necesario comparar la ecuación (3) con la (2), para lo cual debe hallarse la derivada parcial respecto de y como sigue:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2 + g'(y) \qquad \textbf{(4)}$$

Comparando las ecuaciones (2) y (4) se tiene:

$$2yx^2 + g'(y) = 2yx^2 + 4$$

Lo anterior permite identificar que:

$$g'(y) = 4$$

Por tanto,

$$g(y)=\int 4\,dy=4y$$

Por último, la función que se busca es de la forma:

$$f(x, y)=c$$

Entonces, a partir de (3) se tendrá:

$$y^2x^2-3x+4y=c$$

6.6 Resolver:

$$(\tan x-\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y)\,dx+\cos x\cos y\,dy=0$$

Solución

Como se puede observar, la ecuación tiene la forma:

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)dy=0$$

Nótese que la ecuación diferencial es exacta si cumple con la condición:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

En este caso, las derivadas parciales de los coeficientes son:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\operatorname{sen} x\cos y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=-\cos y\operatorname{sen} x$$

Por tanto, la ecuación diferencial es exacta, lo que implica que existe una función f tal que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\tan x-\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y \qquad \textbf{(1)}$$

$$\frac{df}{dy}=\cos x\cos y \qquad \textbf{(2)}$$

Resolviendo para f y separando variables de (1) se tiene:

$$f=\int\left(\tan x-\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y\right)dx$$

Integrando parcialmente,

$$f=\ln\left|\sec x\right|+\operatorname{sen} y\cos x+g\left(y\right) \qquad \textbf{(3)}$$

De (3) se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\cos x\cos y+g'\left(y\right) \qquad \textbf{(4)}$$

Comparando (2) y (4) se obtiene:

$$\cos x \cos y + g'(y) = \cos x \cos y$$

en donde se puede notar que:

$$g'(y) = 0$$
$$g(y) = c$$

La solución es de la forma:

$$f(x, y) = c$$

Por tanto, a partir de (3) se puede escribir:

$$\ln|\sec x| + \operatorname{sen} y \cos x + c = 0$$

6.7 Resolver:

$$(x+y)^2\,dx + (2xy + x^2 - 1)\,dy = 0 \quad \text{sujeto a } y(1) = 1$$

Solución

La ecuación tiene la forma:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

La ecuación diferencial es exacta si se cumple la condición:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}$$

Tomando las derivadas parciales de los coeficientes,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2(x+y)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 2y + 2x$$

Por tanto, la ecuación diferencial es exacta, lo que implica que existe una función f tal que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x+y)^2 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x^2 - 1 \qquad \textbf{(2)}$$

Resolviendo para f y separando variables de (1),

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x+y)^2 \;\Rightarrow\; f = \int (x+y)^2\,dx = \frac{(x+y)^3}{3} + g(y)$$

$$f = \frac{(x+y)^3}{3} + g(y) \qquad \textbf{(3)}$$

Tomando la derivada parcial respecto de y en (3) y comparando con (2) se tiene:

$$x^2+2xy+y^2+g'(y)=x^2+2xy-1$$

La ecuación anterior requiere que:

$$g'(y)=-1-y^2=-(y^2+1)$$

Resolviendo para $g(y)$,

$$g(y)=-\int\left(y^2+1\right)dy=\frac{-y^3}{3}-y$$

La solución es de la forma:

$$f(x,y)=c$$

Por tanto, se puede escribir:

$$\frac{(x+y)^3}{3}-y-\frac{y^3}{3}=c$$

6.8 Resolver:

$$x^2\frac{dy}{dx}+xy=1$$

Solución

Como puede notarse, la ecuación anterior no es separable, no tiene coeficientes homogéneos ni es exacta; sin embargo, puede ponerse en la forma:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$$

Dividiendo por x^2 ambos lados de la ecuación, se verifica que cumple con el formato anterior:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{1}{x^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Recordar que si una ecuación es lineal, entonces existe un factor integrante de la forma:

$$\mu(x)=e^{\int P(x)\,dx}$$

De esta manera, al multiplicar la ecuación diferencial por este factor la convierte en exacta. Para este caso, es posible notar de (1):

$$P(x)=\frac{1}{x}$$

Por tanto, el factor integrante es:

$$\mu(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

Multiplicando a (1) por el factor integrante se tiene:

$$x\frac{dy}{dx}+y=\frac{x}{x^2}=x^{-1} \qquad \textbf{(2)}$$

Como se puede notar, el primer miembro de (2) es una diferencial exacta, por lo que se puede escribir:

$$\frac{d}{dx}(xy)=x^{-1} \qquad \textbf{(3)}$$

Separando variables,

$$d(xy)=x^{-1}dx$$

Por último, integrando en ambos lados de la igualdad la solución es:

$$xy=\ln x+c$$

6.9 Resolver:

$$\cos x\frac{dy}{dx}+y\,\text{sen}\,x=1$$

Solución

La ecuación es lineal, y para verificarlo es importante que tenga la forma:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$$

Dividiendo por cos$x$ ambos lados de la ecuación, se verifica que cumple con el formato anterior:

$$\frac{dy}{dx}+y\tan x=\sec x \qquad \textbf{(1)}$$

El factor integrante es de la forma:

$$\mu(x)=e^{\int P(x)\,dx}$$

Al multiplicar la ecuación diferencial por este factor la convierte en exacta; para este caso, a partir de (1),

$$P(x)=\tan x$$

Por tanto, el factor integrante es:

$$\mu(x)=e^{\int \tan x\,dx}=e^{\ln|\sec x|}=\sec x$$

Multiplicando a (1) por el factor integrante se tiene:

$$\sec x\frac{dy}{dx}+y\tan x\sec x=\sec^2 x$$

Como se puede observar, el primer miembro es una diferencial exacta, por lo que se puede escribir:

$$\frac{d}{dx}(y\sec x)=\sec^2 x$$

Separando variables e integrando se obtiene:

$$y \sec x = \int \sec^2 x$$

Por último, se tiene,

$$y \sec x = \tan x + c$$

6.10 Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{x}$$

Solución

Dado que la ecuación dada es lineal, de segundo orden y no homogénea, la solución está dada por la suma de las soluciones homogénea y particular:

$$y = y_h + y_p$$

en donde:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

Asimismo, dado que:

$$u_1' = \frac{W_1}{W}$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W}$$

donde W es llamado en Wronskiano, el cual está dado por el determinante:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

De igual forma, se sabe que:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} \qquad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

Solución de la homogénea

$$y'' - 4y = 0$$

La ecuación algebraica asociada es:

$$m^2 - 4 = 0$$

$$(m-2)(m+2) = 0$$

Por tanto, las soluciones son:

$$m_1 = 2$$

$$m_2 = -2$$

Por tanto, la solución es

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

Solución particular

En este caso, el wronskiano se puede escribir así:

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}$$

$$W = -2 - 2 = -4$$

Los Wronskianos W_1 y W_2 están dados por:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \dfrac{e^{2x}}{x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \dfrac{e^{2x}}{x} \end{vmatrix}$$

Por tanto, se puede escribir:

$$u_1' = \frac{1}{4x}$$

$$u_2' = \frac{e^{4x}}{-4x}$$

Integrando,

$$u_1 = \int \frac{1}{4}\frac{dx}{x} = \frac{1}{4}\ln|x|$$

$$u_2 = -\frac{1}{4}\int \frac{e^{4x}}{x}\,dx$$

Nótese que esta última integral no tiene solución cerrada en términos de funciones elementales, por lo que quedará indicada.

La solución particular está dada por:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$y_p = \left(\frac{1}{4}\ln x\right)\left(e^{2x}\right) + e^{-2x}\left(-\frac{1}{4}\right)\int_{t_0}^{t} \frac{e^{4x}}{x}\,dx$$

o bien,

$$y_P = \frac{1}{4}\left[e^{2x} \ln x - e^{-2x} \int_{t_0}^{t} \frac{e^{ux}}{x}\, dx \right]$$

Así, la solución completa es:

$$y = y_h + y_p$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}\left[e^{2x} \ln x - e^{-2x} \int_{t_0}^{t} \frac{e^{yx}}{x}\, dx \right]$$

6.11 Resolver:

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{(1+e^x)}$$

Solución

La ecuación dada es lineal, de segundo orden y no homogénea. La solución es de la forma:

$$y = y_h + y_p$$

donde,

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

A partir de aquí se procede de la misma forma que en el problema resuelto anterior.

Solución de la homogénea

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

Así, la ecuación algebraica asociada es:

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$

$$(m+2)(m+1) = 0$$

Las raíces son:

$$m_1 = -2$$

$$m_2 = -1$$

Así, la solución de la homogénea está dada por:

$$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$$

Solución particular

El Wronskiano se puede plantear como:

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-x} \\ -2e^{-2x} & -e^{-x} \end{vmatrix}$$

$$W = -e^{-3x} + 2e^{-3x} = e^{-3x}$$

Los Wronskianos W_1 y W_2 están dados por:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \dfrac{1}{1+e^x} & -e^{-x} \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & \dfrac{1}{(1+e^x)} \end{vmatrix}$$

Por tanto, se puede escribir:

$$u'_1 = \frac{-e^{-x}}{e^{-3x}(1+e^x)}$$

Simplificando,

$$u'_1 = \frac{-e^{2x}}{1+e^x} \qquad \textbf{(1)}$$

De forma semejante,

$$u'_2 = \frac{e^{-2x}}{e^{-3x}(1+e^x)}$$

Simplificando,

$$u'_2 = \frac{e^x}{1+e^x} \qquad \textbf{(2)}$$

La integral de (1) se puede hallar reconociendo que se trata de una fracción impropia, por lo que al dividir se tiene:

$$u_1 = -\int \left(e^x + \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx$$

Así, la solución es:

$$u_1 = -\left(e^x + \ln\left|1+e^x\right| \right)$$

La integral de (2) es:

$$u_2 = \int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$$

$$u_2 = \ln\left|1+e^x\right|$$

De este modo, la solución completa será:

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + \ln\left|1+e^x\right| \left(e^{-2x} + e^{-x} \right)$$

6.12 Resolver:

$$y''-2y'+y=\frac{e^x}{(1+x^2)}$$

Solución

Como se recordará, la solución está compuesta por la solución de la homogénea más la particular:

$$y=y_h+y_p$$

donde,

$$y_p=u_1y_1+u_2y_2$$

Solución de la homogénea

$$y''-2y+y=0$$

La ecuación algebraica asociada es:

$$m^2-2m+1=0$$

$$(m-1)^2=0$$

Las raíces son:

$$m_1=1$$

$$m_2=1$$

La solución de la ecuación homogénea se puede escribir así:

$$y_h=c_1e^x+c_2xe^x$$

Solución particular

El Wronskiano se puede plantear como:

$$W=\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x+e^x \end{vmatrix}$$

$$=e^x(xe^x+e^x)-xe^{2x}$$

$$=xe^{2x}+e^{2x}-xe^{+2x}=e^{2x}$$

Los Wronskianos W_1 y W_2 están dados por:

$$W_1=\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \dfrac{e^x}{(1+x^2)} & xe^x+e^x \end{vmatrix}$$

$$W_2=\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \dfrac{e^x}{(1+x^2)} \end{vmatrix}$$

Por tanto, se puede escribir:

$$u_1' = \frac{\dfrac{-xe^x e^x}{(1+x^2)}}{e^{2x}}$$

Simplificando,

$$u_1' = -\frac{x}{1+x^2}$$

Integrando,

$$u_1 = -\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|$$

De manera similar,

$$u_2' = \frac{\dfrac{e^x e^x}{(1+x^2)}}{e^{2x}} = \frac{1}{1+x^2}$$

Integrando,

$$u_2 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x$$

La solución particular está dada por:

$$y_P = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$= -\frac{e^x \ln\left|1+x^2\right|}{2} + xe^x \tan^{-1} x$$

Por último, la solución completa es:

$$y = y_h + y_p$$

$$= c_1 e^x + c_2 xe^x + xe^x \tan^{-1} x - \frac{e^x \ln\left|1+x^2\right|}{2}$$

6.13 Resolver:

$$y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$$

Solución

La solución se compone de dos partes: la homogénea y la particular.

Solución de la homogénea

$$y'' + 2y' + y = 0$$

La ecuación algebraica asociada es:

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

$$(m+1)^2 = 0$$

Las raíces son:

$$m_1 = -1$$

$$m_2 = -1$$

Por tanto, la solución homogénea se puede escribir de la siguiente manera:

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

Solución de la particular

El Wronskiano se puede escribir como:

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & -xe^{-x} + e^{-x} \end{vmatrix}$$

$$W = e^{-2x}$$

Los Wronskianos W_1 y W_2 están dados por:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^{-x} \\ e^{-x} \ln x & -xe^{-x} + e^{-x} \end{vmatrix}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{x} & e^{-x} \ln x \end{vmatrix}$$

De este modo, es posible escribir:

$$u'_1 = -x \ln x$$

Integrando por partes,

$$u_1 = \frac{-x^2}{4}\left[2 \ln x - 1\right]$$

De igual modo,

$$u'_2 = \ln x$$

Integrando por partes,

$$u_2 = x \ln x - x$$

La solución particular se puede escribir

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

Por último, la solución completa es:

$$y = y_h + y_p$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{e^{-x} x^2}{-4}\left[2\ln x - 1\right] + x e^{-x}\left(x \ln x - x\right)$$

6.14 Hallar la solución particular de la ecuación:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{3x}$$

Solución

La ecuación dada es lineal, de tercer orden y no homogénea; por tanto, la solución está compuesta por la solución de la homogénea más la particular:

$$y = y_h + y_p$$

donde,

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3$$

En este caso, se procede de la misma forma que en el problema resuelto anterior.

Solución de la homogénea

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$$

La ecuación algebraica asociada es:

$$m^3 - 2m^2 - m + 2 = 0$$

Factorizando la ecuación anterior se tiene:

$$(m-1)(m-2)(m+1) = 0$$

La solución de la homogénea es:

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-x}$$

Solución particular

El Wronskiano se puede plantear como:

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{-x} \\ e^x & 2e^{2x} & -e^{-x} \\ e^x & 4e^{2x} & e^{-x} \end{vmatrix}$$

$$= e^x(2e^x + 4e^x) - e^{2x}(1+1) + e^{-x}(4e^{3x} - 2e^{3x}) = 6e^{2x}$$

Nótese que las funciones u'_1, u'_2 y u'_3 se pueden hallar mediante la expresión:

$$u'_k = \frac{W_k}{W} \qquad k = 1, 2, 3$$

Por tanto, se puede escribir:

$$u_1' = \frac{W_1}{W}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} & e^{-x} \\ 0 & 2e^{2x} & -e^{-x} \\ e^{3x} & 4e^{2x} & e^{-x} \end{vmatrix}$$

$$= -3e^{4x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{x} & 0 & e^{-x} \\ e^{x} & 0 & -e^{-x} \\ e^{x} & e^{3x} & e^{-x} \end{vmatrix}$$

$$= 2e^{3x}$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} & 0 \\ e^{x} & 2e^{2x} & 0 \\ e^{x} & 4e^{2x} & e^{3x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{6x}$$

Formando las funciones u_1', u_2' y $u'a_3$, se puede escribir:

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-3e^{4x}}{6e^{2x}}$$

Integrando,

$$u_1 = -\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = -\frac{1}{4}e^{2x}$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{2e^{3x}}{6e^{2x}}$$

$$u_2' = \frac{2e^{3x}}{6e^{2x}} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{3}\int e^{x}dx = \frac{e^{x}}{3}$$

$$u_3' = \frac{W_3}{W} = \frac{e^{6x}}{6e^{2x}}$$

$$u_3 = \int \frac{e^{6x}}{6e^{2x}}\,dx = \frac{1}{6}\int e^{4x}\,dx$$

$$u_3 = \frac{1}{24}e^{4x}$$

Así, la solución particular está dada por:

$$y_P = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3$$

$$y_P = -\frac{1}{4}e^{2x}e^{x} + \frac{e^{2x}e^{x}}{3} + \frac{e^{-x}e^{4x}}{24}$$

Simplificando,

$$y_P = \frac{1}{8}e^{3x}$$

6.15 La población de una pequeña ciudad crece en un instante cualquiera con una rapidez proporcional a la cantidad de habitantes en dicho instante. Si su población inicial de 500 habitantes aumentó 20% en 10 años, ¿cuál será la población dentro de 30 años?

Solución

Sea x = número de habitantes en un instante dado.

El modelo de crecimiento es:

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

Separando variables,

$$\frac{dx}{x} = k\,dt$$

Integrando en ambos lados,

$$\ln x = kt + c$$

$$x = e^{kt}e^{c}$$

o bien se puede simplificar como:

$$x = ce^{kt} \qquad \textbf{(1)}$$

Las condiciones iniciales son:

$$x(0) = 500 \qquad \textbf{(2)}$$

Notar que en 10 años la población creció 20%, es decir,

$$x(10) = 500 + 500(0.2) = 600 \qquad \textbf{(3)}$$

Sustituyendo la condición inicial (2) en (1) se tiene:

$$500 = c$$

Por tanto, la solución queda así:

$$x = 500e^{kt} \qquad \textbf{(4)}$$

Para evaluar la constante de proporcionalidad, es posible sustituir (3) en (4) como sigue:

$$600 = 500\, e^{10k}$$

$$\frac{600}{500} = e^{10k}$$

$$\ln\left|\frac{600}{500}\right| = 10k$$

Donde:

$$k = 0.01823$$

Por tanto, la solución será:

$$x = 500e^{0.01823t} \qquad \textbf{(5)}$$

La cantidad de habitantes en 30 años se puede obtener a partir de (5), al sustituir $t = 30$ años.

Así,

$$x = 500\, e^{0.01823(30)}$$

$$x = 864 \text{ habitantes}$$

6.16 Un termómetro indica que la temperatura en una habitación es de 80 °F. Si el termómetro se coloca en el exterior donde la temperatura es de 10 °F, después de medio minuto se nota que la temperatura es de 50 °F. ¿Cuál será la temperatura cuando $t = 1$ min? ¿En cuánto tiempo se alcanzarán los 15 °F?

Solución

De la ley de enfriamiento de Newton, el modelo que describe el fenómeno puede escribirse:

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T_0\right)$$

donde la temperatura del medio ambiente está dada por:

$$T_0 = 10\ ^\circ\text{F}$$

Así, el modelo toma la forma:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 10)$$

Separando variables,

$$\frac{dT}{T - 10} = k\, dt$$

Integrando en ambos lados,

$$\ln|T - 10| = kt + c$$

Resolviendo para T,

$$T = c\,e^{kt} + 10 \qquad \textbf{(1)}$$

Las condiciones iniciales están dadas por:

$$T(0) = 80 \qquad \textbf{(2)}$$

Sustituyendo (2) en (1),

$$80 = c + 10$$

$$c = 70$$

El modelo es el siguiente:

$$T = 70e^{kt} + 10 \qquad \textbf{(3)}$$

Por las condiciones del problema,

$$T(0.5) = 50 \qquad \textbf{(4)}$$

Para obtener la constante de proporcionalidad se puede sustituir (4) en (3), de la siguiente manera:

$$50 = 70e^{0.5k} + 10$$

$$\frac{40}{70} = e^{0.5k}$$

Tomando logaritmos naturales en ambos lados de la ecuación se tiene:

$$\ln\frac{40}{70} = 0.5k$$

$$\mathrm{k} = -1.1192$$

Por tanto, la función T es $$T = 70\,e^{-1.1192t} + 10 \qquad \textbf{(5)}$$

Así, la temperatura en 1 minuto se puede obtener al sustituir en (5):

$$T = 32.85\ ^\circ\mathrm{F}$$

Por su parte, el tiempo en llegar a 15 °F se determina al sustituir este valor de temperatura en (5):

$$15 = 70\,e^{-1.1192t} + 10$$

$$\frac{15-10}{70} = e^{-1.1192t}$$

$$t = \frac{\ln\left|\frac{5}{70}\right|}{-1.1192}$$

$$t = 2.358 \text{ min}$$

6.17 Se aplica un voltaje de $30V$ a un circuito en serie, en el cual la inductancia es de 0.1 henrios y la resistencia es 50 Ω. Encontrar la intensidad de corriente $i(t)$ si $i(0)=0$ y determinar i cuando $t\to\infty$.

Solución

El circuito aparece en la figura 6.1.

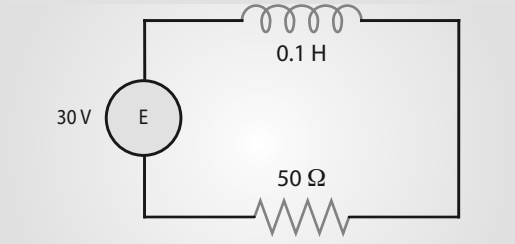


Figura 6.1

La ecuación diferencial que describe el fenómeno es la siguiente:

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E(t)$$

Después de sustituir los valores de la inductancia, la resistencia y el voltaje, el modelo se puede escribir como (nótese que se multiplicó por 10 ambos miembros de la ecuación para tener coeficientes enteros).

$$\frac{di}{dt}+500i=300 \Rightarrow \text{ Ecuación lineal} \qquad \textbf{(1)}$$

El factor integrante está dado por:

$$e^{\int 500\,dt}=e^{500t}$$

Multiplicando a (1) por el factor integrante,

$$e^{500t}\frac{di}{dt}+500ie^{500t}=300e^{500t}$$

o bien se puede escribir:

$$\frac{d}{dt}\left(ie^{500t}\right)=300e^{500t}$$

Separando variables e integrando,

$$ie^{500t}=300\int e^{500t}\,dt$$

$$ie^{500t}=\frac{300}{500}e^{500t}+c$$

Resolviendo para la intensidad de corriente,

$$i=0.6+ce^{-500t}$$

A partir de las condiciones iniciales,

$$i(0)=0,$$

se obtiene que $c=-0.6$

Entonces, para cualquier tiempo t,

$$i = 0.6 - 0.6\, e^{-500t}$$

Cuando $t \to 0$, se deduce que la corriente es:

$$i = 0.6 \text{ amperes}$$

6.18 A un circuito en serie en el que la resistencia es 200 Ω y la capacitancia es de 1×10^{-4} F se le aplica un voltaje de 100 V. Calcular la carga $q(t)$ en el capacitor si $q(0) = 0$ y obtener la corriente.

Solución

El circuito aparece en la figura 6.2.

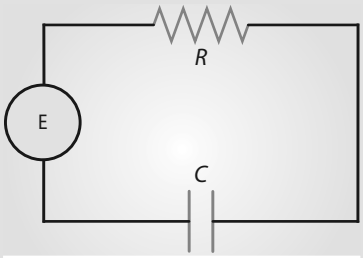


Figura 6.2

La ecuación diferencial que modela el circuito es:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t)$$

Sustituyendo los valores de resistencia, capacitancia y voltaje se tiene:

$$200\frac{dq}{dt} + \frac{q}{1\times 10^{-4}} = 100$$

o bien se puede escribir:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{0.02} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{lineal} \qquad \textbf{(1)}$$

Así, el factor integrante es:

$$e^{\int \frac{dt}{0.02}} = e^{\frac{t}{0.02}}$$

Multiplicando a (1) por el factor integrante se tiene:

$$e^{\frac{t}{0.02}}\frac{dq}{dt} + e^{\frac{t}{0.02}}q = \frac{e^{\frac{t}{0.02}}}{2}$$

Se puede reconocer el primer miembro como una diferencial exacta:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{0.02}}q\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{0.02}}$$

Separando variables e integrando,

$$e^{\frac{t}{0.02}}q = \frac{1}{100}e^{50t} + c$$

Resolviendo para la carga q,

$$q = \frac{1}{100} + e^{-50t}c$$

A partir de las condiciones iniciales se tiene:

$$q(0) = 0, \text{ se obtiene que la } c = -\frac{1}{100}$$

Entonces, para cualquier tiempo t la carga eléctrica está dada por:

$$q = \frac{1}{100} - \frac{1}{100}e^{-50t}$$

Recordando que la intensidad de corriente es la razón de cambio de la carga respecto del tiempo, se tiene:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Por tanto, la corriente se puede escribir

$$i = \frac{50}{100}e^{-50t} = \frac{1}{2}e^{-50t}$$

6.19 Se disuelven 80 lb de sal en un gran tanque que contiene 600 galones de agua. Posteriormente se bombea agua con sal al tanque a razón de 5 gal/min, y luego la solución mezclada se bombea fuera del tanque a razón de 5 gal/min. Si la concentración de la solución que entró es 2 lb/gal, encontrar la ecuación diferencial que modela la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera.

Solución

Sea $A(t)$ la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante dado; entonces, la rapidez con que $A(t)$ cambia está dada por:

$$\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix} \text{rapidez con que} \\ \text{entra la sustancia} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{rapidez con que} \\ \text{sale la sustancia} \end{pmatrix}$$

La rapidez con que entra la sustancia se puede escribir de la siguiente manera:

$$R_1 = (5 \text{ gal/min})\ (2 \text{ lb/gal}) = 10 \text{ lb/min}$$

De manera semejante, la rapidez con la que sale es:

$$R_2 = \left(\frac{5 \text{ gal}}{\text{min}}\right)\left(\frac{A}{600}\frac{\text{lb}}{\text{gal}}\right) = \frac{A}{120}$$

Por último, la ecuación diferencial que modela el fenómeno del problema de mezclas se escribe así:

$$\frac{dA}{dt} = 10 - \frac{A}{120} \text{ sujeto a: } A(0) = 80$$

6.20 Un tanque contiene 200 litros de un líquido, en el que se disuelven 30 gramos de sal. Luego, en el tanque se introduce una mezcla de agua con sal con una concentración de 1 g de sal por cada litro y con un flujo de 4 litros por cada minuto. La solución, adecuadamente mezclada, se bombea hacia fuera con la misma rapidez de flujo. Encontrar el número de gramos $A(t)$ de sal que hay en un instante cualquiera.

Solución

Procediendo como en el problema anterior, sea $A(t)$ la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante dado. Por tanto, la rapidez con que $A(t)$ cambia está dada por:

$$\frac{dA}{dt}=\left(\begin{array}{c}\text{rapidez con que}\\ \text{entra la sustancia}\end{array}\right)-\left(\begin{array}{c}\text{rapidez con que}\\ \text{sale la sustancia}\end{array}\right)$$

La rapidez con que entra la sustancia se puede escribir así:

$$R_1=\frac{4\text{ L}}{\text{min}}\left(\frac{1\text{ g}}{\text{L}}\right)=4\frac{\text{g}}{\text{min}}$$

De manera semejante, la rapidez con que sale la sustancia se escribe:

$$R_2=\left(\frac{4\text{ L}}{\text{min}}\right)\left(\frac{A}{200}\frac{\text{g}}{\text{L}}\right)=\frac{A}{50}$$

Por último, la ecuación diferencial que modela el fenómeno del problema de mezclas se escribe:

$$\frac{dA}{dt}=4-\frac{A}{50}$$

o bien puede escribirse:

$$\frac{dA}{dt}+\frac{A}{50}=4 \qquad \textbf{(1)}$$

En ésta el factor integrante es:

$$\mu(t)=e^{\int\frac{1}{50}dt}=e^{\frac{1}{50}t}$$

Multiplicando por el factor integrante,

$$e^{\frac{t}{50}}\frac{dA}{dt}+\frac{e^{\frac{t}{50}}A}{50}=e^{\frac{t}{50}}4$$

El primer miembro de la ecuación anterior puede escribirse:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{50}}A\right)=e^{\frac{t}{50}}4$$

Separando variables e integrando,

$$e^{\frac{t}{50}}A=4\int e^{\frac{t}{50}}\,dt$$

$$e^{\frac{t}{50}}A=200e^{\frac{t}{50}}+c$$

Entonces, para cualquier tiempo t, la cantidad de sal está dada por:

$$A = 200 + ce^{-\frac{t}{500}}$$

A partir de las condiciones iniciales,

$$A(0) = 30$$

Se obtiene:

$$c = -170$$

Por último, se puede escribir:

$$A(t) = 200 - 170e^{-\frac{t}{500}}$$

6.21 Un gran tanque está prácticamente lleno con 100 galones de líquido, en los que se disuelven 10 galones de sal. Una salmuera que contiene $\frac{1}{2}$ lb de sal por galón se bombea al tanque con una rapidez de 6 $\frac{\text{gal}}{\text{min}}$. La solución, adecuadamente mezclada, se bombea en seguida hacia fuera del tanque con una rapidez menor de 4 $\frac{\text{gal}}{\text{min}}$. Hallar el número de libras de sal que hay en el tanque después de 30 minutos.

Solución

Sea $A(t)$ la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante dado. De esta manera, la rapidez con que $A(t)$ cambia está dada por:

$$\frac{dA}{dt} = \left(\begin{array}{c}\text{rapidez con que}\\ \text{entra la sustancia}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{rapidez con que}\\ \text{sale la sustancia}\end{array}\right)$$

La rapidez con que entra la sustancia puede escribirse así:

$$R_1 = \left(6\,\frac{\text{gal}}{\text{min}}\right)\left(\frac{1}{2}\,\frac{\text{lb}}{\text{gal}}\right) = 3\,\frac{\text{lb}}{\text{min}}$$

De manera semejante, la rapidez con que sale es:

$$R_2 = \left(4\,\frac{\text{gal}}{\text{min}}\right)\left(\frac{A}{100+2t}\,\frac{\text{lb}}{\text{min}}\right)$$

Por último, la ecuación diferencial que modela el fenómeno del problema de mezclas se escribe así:

$$\frac{dA}{dt} = 3 - \frac{4A}{2(50+t)} = 3 - \frac{2A}{50+t}$$

o bien,

$$\frac{dA}{dt} + \frac{2A}{50+t} = 3 \Rightarrow \text{Ecuación lineal} \qquad \textbf{(1)}$$

El factor integrante puede escribirse:

$$e^{\int \frac{2}{50+t}\,dt} = e^{\ln|50+t|^2} = (50+t)^2$$

Multiplicando (1) por el factor integrante $(50+t)^2$,

$$(50+t)^2\frac{dA}{dt}+\frac{(50+t)^2 2A}{(50+t)}=3(50+t)^2$$

Se puede notar una diferencial exacta en el primer miembro:

$$\frac{d}{dt}\left(A(50+t)^2\right)=3(50+t)^2$$

Separando variables e integrando se puede escribir:

$$A(50+t)^2=(50+t)^3+c$$

Resolviendo para la cantidad de sal,

$$A=(50+t)+(50+t)^{-2}c$$

A partir de las condiciones iniciales,

$$A(0)=10, \text{ se obtiene que la } c=-1\times 10^5$$

Entonces, para cualquier tiempo t, la cantidad de sal está dada por:

$$A=(50+t)-1\times 10^5(50+t)^{-2}$$

La cantidad de sal que habrá en 30 minutos se puede hallar, sustituyendo este tiempo en la solución anterior, de la siguiente manera:

$$A=(50+30)-1\times 10^5(50+30)^{-2}$$

$$A=64.4 \text{ lb de sal}$$